Linköpings Universitet
Institutionen för Fysik, Kemi, och Biologi

Lösningsförslag – tentamen

Onsdagen den 5:e juni 2013, kl 14:00 – 18:00

Fysik del B2 för tekniskt / naturvetenskapligt basår / bastermin

BFL122/TEN2 samt BFL111/TEN6

Tentamen består av totalt 6 uppgifter där varje korrekt löst uppgift belönas med 4 poäng. Maximal skrivningspoäng är 24.

Hjälpmedel: Miniräknare och formelsamling; Formler och Tabeller i Fysik, Matematik och Kemi, Konvergenta HB

Tänk på att:

- Varje inlämnat lösningsblad skall vara numrerat och märkt med AID-nummer
- Endast lösningen till **EN** uppgift får redovisas på varje blad/ papper
- Inlämnade lösningar skall vara renskrivna och läsbara
- Alla lösningar skall vara välmotiverade
- En figur/ skiss underlättar alltid lösningsprocessen samt förståelsen av lösningen.

Jourhavande lärare kommer att finnas till hands under själva tentamenstiden för att svara på frågor angående eventuella oklarheter i problemformuleringarna. Om jourhavande lärare inte finns på plats i ett visst ögonblick kan denne nås på tel. nr. 0723-282327 under skrivningstiden.

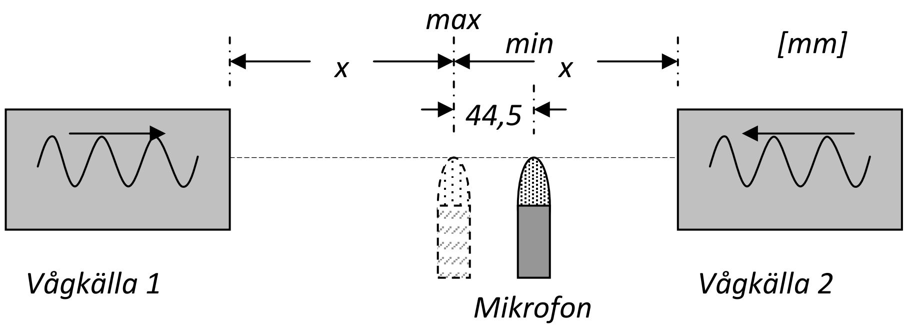
Lösningsförslag kommer att läggas upp på kurshemsidan efter skrivningstidens slut.

Prel. betygsgränser:		
	5	20-24 p
	4	15-19 p
	3	10-14 p

Lycka till!!

1. När det vid t.ex. en olycka i en kemifabrik skett ett utsläpp av en giftig gas som till viss del blandar sig med luften i atmosfären kan man m.h.a. en förarlös miniatyrhelikopter uppskatta giftgasens fördelning och utspridning i luftlagren genom att mäta ljudhastigheten på många platser i luft/ giftgasblandningen och jämföra med ljudhastigheten i luft utan giftgas, då ljudhastigheten ändrar sig med koncentrationen giftgas i luften. För att få ett väldigt noggrant värde på hastigheten inom ett litet område kan det göras med följande uppställning, se illustration nedan:

Två små vågkällor av samma material fås att vibrera med samma frekvens, 2,00 kHz, så att de samtidigt skickar ut mekaniska vågor. Vågkällorna svänger i fas med varandra. Mellan de båda vågkällorna finns en mikrofon som mäter ljudstyrkan. I punkten mittemellan vågkällorna uppmäts maximal ljudstyrka. När så mikrofonen i en viss mätning flyttas 44,5 mm åt sidan utefter linjen mellan vågkällorna (se illustration) fås minimal ljudstyrka.



a) *Vilket värde på ljudhastigheten ger denna mätning?*

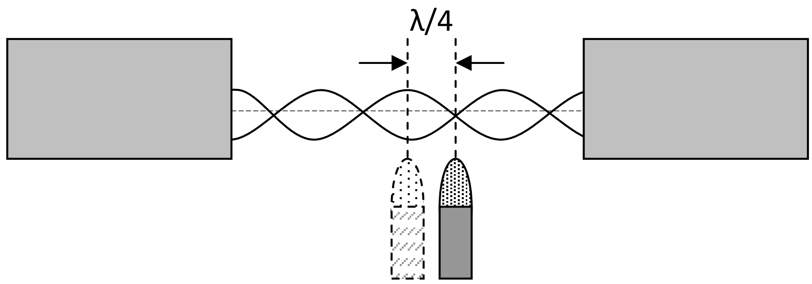
(3p)

b) *Om man i denna tillämpning kunde välja mellan att generera transversella eller longitudinella vågor i materialen hos vågkällorna skulle det då kunna finnas någon fördel med att välja den ena vågtypen framför den andra eller inte? Motivera ditt svar väl!*

(1p)

Lösningsförslag:

a) De två vågorna som sänds ut från två likadana vågkällor har samma frekvens och utbreder sig genom samma material (luft eller luft/giftgasblandning) och har därför samma utbredningshastighet, vilket ger samma våglängd på de två vågorna. Dessa vågor kommer att mötas och interferera med varandra (bl.a.) längs förbindelselinjen mellan vågkällorna, och bilda en typ av stående våg. Eftersom de är i fas med varandra (vågtoppar sänds ut samtidigt från båda vågkällorna) kommer vågorna att summera ihop till en våg som varierar mycket i amplitud mitt emellan vågkällorna, d.v.s. här fås en buk som ju motsvarar maximal styrka på ljudet. Lite vid sidan av detta maximum i mitten registreras ett ljudminimum, motsvarande en nod i den stående vågen. Mellan två intill varandra liggande noder (och motsvarande för intill varandra liggande bukar) är det alltid en halv våglängd. Mellan en buk och en nod måste det därför vara en fjärdedels våglängd, se figur nedan.



Följande värde fås då på vågrörelsens våglängd:

$$\lambda/4 = 0{,}0445 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 4 \cdot 0{,}0445\ [\text{m}] = 0{,}178\ [\text{m}]$$

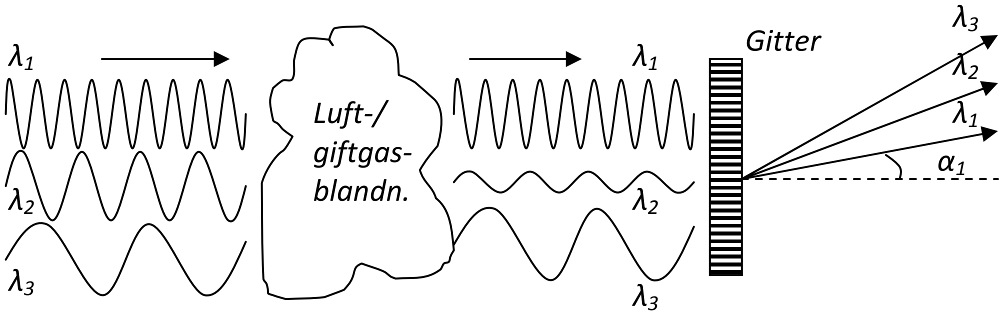
Enligt sambandet mellan utbredningshastighet, frekvens och våglängd fås då:

$$v = f \cdot \lambda = 2{,}00 \cdot 10^3 \cdot 0{,}178 = 356\ [\text{m/s}]$$

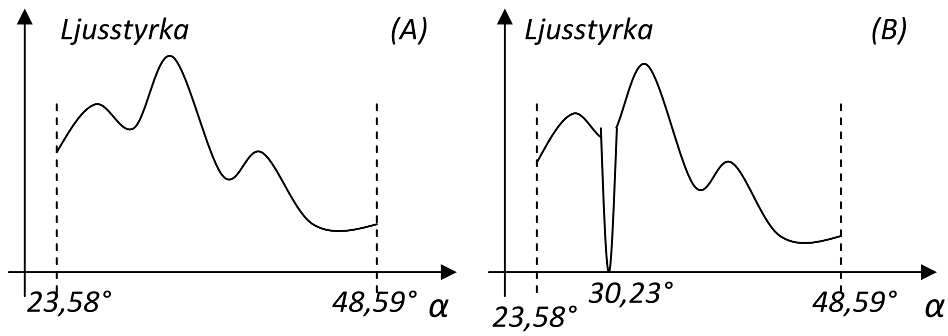
Svar: *Denna mätning gav värdet 356 m/s för ljudets utbredningshastighet*

b) Eftersom ljudvågorna i sig utgör en longitudinell vågrörelse skulle det vara fördelaktigt att kunna generera longitudinella vågor.

2. Man kan också få information om vilka ev. giftiga ämnen som läckt ut genom att undersöka ljus som passerat genom luft/giftgas-blandningen och se vilka våglängder hos ljuset som absorberats (minskat i ljusstyrka) i blandningen jämfört med i vanlig luft, se figur nedan. För att kunna mäta ljusstyrkan uppdelat på olika våglängder används ett gitter för att dela upp ljuset.



Säg att man bara studerar den del av ljuset som motsvarar synligt ljus (400-750nm, vilket är det intervall som gäller för figurerna (A) och (B) nedan) och att man genom att mäta styrkan hos ljuset i olika vinklar α i första ordningens spektrum (k = 1), sedan det passerat genom ett gitter, fått följande resultat för ren luft (A) och luft/giftgas-blandningen (B).

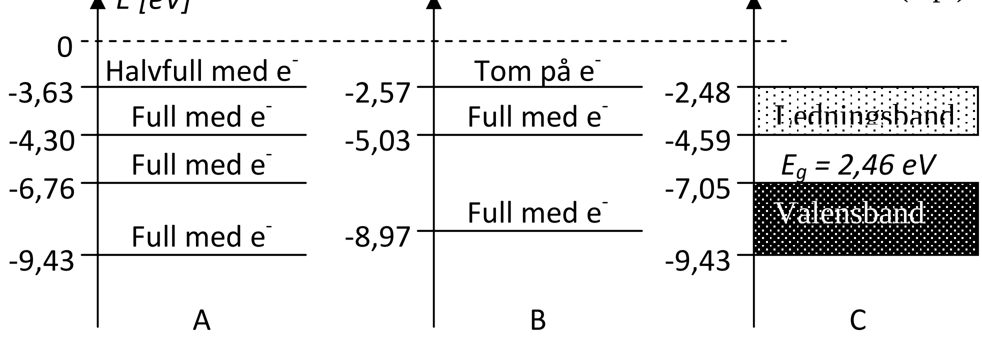


a) *Vad är det för värde på gitterkonstanten hos det gitter som används i denna mätning?*

(3p)

b) *Vilket av de hypotetiska ämnena – A, B, eller C – för vilka energinivådiagrammen ges nedan, fanns i luft/giftgas-blandningen? Motivera ditt svar med en enkel uträkning och resonemang!*

(1p)



Lösningsförslag

a) Eftersom mätningen av ljusstyrkan i varje punkt bakom gittret gjorts för vinklar mellan 23,58 och 48,59° och att hela intervallet ska motsvara våglängder från 400 till 750 nm så måste ”start-” och ”slutvinkeln” motsvara respektive 400 och 750 nm. Från gitterformeln nedan kan man se att den mindre vinkeln måste motsvara den kortare våglängden, alltså 400 nm (mindre α ger ett mindre värde på sinα och eftersom d är konstant måste då värdet på våglängden λ vara mindre, d.v.s. kortare våglängd). Från detta kan gitterkonstanten räknas ut.

$$k \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha \;\Leftrightarrow\; d = k \cdot \lambda / \sin\alpha \;\Rightarrow\; d = 1 \cdot 4{,}00 \cdot 10^{-7} / \sin 23{,}58 = 1{,}00 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{m}]$$

Insättning av 750 nm och 48,59° för kontroll ger samma värde på gitterkonstanten:

Svar: *Gitterkonstantens värde är 1,00 µm*

b) Genom att jämföra figur (A) och (B) kan man se att ljus av den våglängd som motsvarar vinkeln 30,23° har minskat i styrka. Därmed har ljus av denna våglängd absorberats i giftgasen beroende på att elektroner exciterats i de fria gasmolekylerna. Vinkeln motsvarar följande våglängd:

$$k \cdot \lambda = d \cdot \sin\alpha \;\Leftrightarrow\; \lambda = d \cdot \sin\alpha / k = 1{,}00 \cdot 10^{-6} \cdot \sin 30{,}23 / 1 = 5{,}035 \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{m}]$$

I energinivådiagrammen ges energierna för de olika nivåerna (/banden) som elektronerna kan befinna sig i. För att se vilken/vilka excitationer som är möjliga när ljus av våglängden 503,5 nm sänds mot dessa ämnen behöver man räkna ut vilken energi hos fotonen som motsvaras av våglängden 503,5 nm. Från sambanden $E = h \cdot f$ och $c = f \cdot \lambda$ fås:

$$E = h \cdot f = h \cdot c/\lambda = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} / 5{,}035 \cdot 10^{-7}\ [\mathrm{J}] = 3{,}95 \cdot 10^{-19}\ [\mathrm{J}]$$

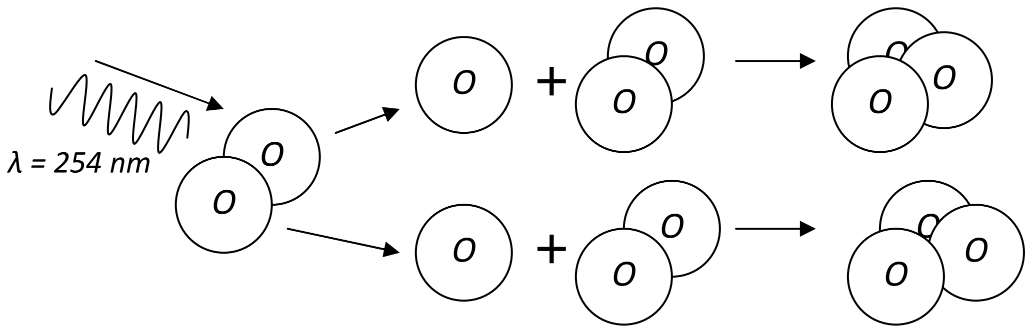
För att enklare jämföra med diagrammen uttrycks energimängden i enheten elektronvolt istället:

$$1\ \mathrm{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} \;\Leftrightarrow\; 3{,}95 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J} = 2{,}46\ \mathrm{eV}$$

Om man studerar energinivådiagrammen för ämnena A, B och C kan man konstatera att det finns en sådan skillnad i energi mellan två nivåer i alla dessa ämnen (mellan -6,76 och -4,30 i A, mellan -5,03 och -2,57 i B och över bandgapet i C) men då nivån som excitation skulle behöva ske till i ämne A redan är full på elektroner är inte denna övergång möjlig och då energidiagrammet i C motsvarar det för ett fast ämne och inte en gas utgör B sökt ämne

Svar: *Ämnet som fanns i gasen var B*

3. För att inte riskera att giftiga eller t.ex. illaluktande ämnen kommer ut i vår närmiljö kan man behandla gaser från kemiska processer eller exempelvis matos från restauranger med UV-ljus (det är så luktämnen tas bort från ventilationsluften från många storkök). UV-ljuset reagerar med syre (O_2) i luften genom att en foton absorberas av syremolekylen som sönderfaller i två syreatomer. Dessa reagerar med varsin syremolekyl och bildar två ozonmolekyler (O_3), se figur, som i sin tur sedan reagerar med de giftiga eller illaluktande ämnena och bryter ned dem till ofarliga/ luktlösa molekyler.



$$O_2 \xrightarrow{\text{1foton}} 2O \;+\; 2O_2 \longrightarrow 2O_3$$

I ett sådant UV-reningssystem används ett slags lysrör som bara ger ifrån sig ljus av våglängden 254 nm. Säg att 0,70% av alla UV-fotoner som sänds ut absorberas av syremolekyler och leder till bildning av ozon (O_3, molekylmassa: $7{,}97 \cdot 10^{-26}$ kg). För att i alla förekommande fall kunna säkerställa fullständig nedbrytning av giftiga/ illaluktande ämnen krävs det att 36 µg ozon bildas per sekund i reningssystemet.

a) *Hur stor behöver effekten på UV-lysröret vara?*

(3p)

b) *Säg att en sjättedel av den totala emittansen från en glödlampa, vars glödtråd har arean 0,60 cm^2, utstrålas som ljus av sådana våglängder som kan sönderdela syremolekyler. Antag att glödtråden kan betraktas som en absolut svartkropp. För att med glödlampan kunna sönderdela lika mycket ozon per minut som med lysröret ovan, vilken yttemperatur måste glödtråden ha?*

(1p)

Lösningsförslag:

a) 36 µg ozon behöver bildas per sekund. Då massan för varje ozon-molekyl är $7{,}97 \cdot 10^{-26}$ kg innebär det att det per sekund måste bildas:

$$36 \cdot 10^{-6} \text{ [g]} / 7{,}97 \cdot 10^{-26} \text{ [kg]} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ [kg]} / 7{,}97 \cdot 10^{-26} \text{ [kg]} = 4{,}52 \cdot 10^{17} \text{ st } O_3$$

Varje foton som absorberas av en syremolekyl ger dock upphov till 2 st O_3-molekyler. För att få $4{,}52 \cdot 10^{17}$ st O_3 behövs det alltså bara att hälften så många fotoner absorberas, d.v.s. $2{,}26 \cdot 10^{17}$ st fotoner. Detta antal är det som verkligen behöver absorberas av syremolekyler, men dessa utgör bara 0,7% av det totala antalet fotoner eftersom det bara är 0,7% av alla fotoner som faktiskt absorberas av syremolekylerna. Från lysröret behövs det alltså skickas ut många fler, antalet X enligt:

$$2{,}26 \cdot 10^{17} = 0{,}0070 \cdot X \iff X = 2{,}26 \cdot 10^{17} / 0{,}0070 = 3{,}23 \cdot 10^{19} \text{ st.}$$

Varje sådan foton har energin:

$$E = h \cdot f = h \cdot c/\lambda = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} / 2{,}54 \cdot 10^{-7} \text{ [J]} = 7{,}83 \cdot 10^{-19} \text{ [J]}$$

Under en sekund kommer då den sammanlagda energin som sänds ut från lysröret att utgöras av antalet fotoner multiplicerat med energin hos var och en av dem:

$$E_{tot} = 3{,}23 \cdot 10^{19} \text{ [st]} \cdot 7{,}83 \cdot 10^{-19} \text{ [J/st]} = 25{,}3 \text{ [J]}$$

Eftersom denna energi behöver utvecklas varje sekund motsvarar det också den effekt som krävs.

Svar: *Lysröret behöver ha en effekt på 25W*

b) Glödlampan kan betraktas som en svartkropp vilket innebär att den effekt som strålar ut från glödlampan P_{gl} precis som för en svartkropp (P_{sk}) bara beror på svartkroppens area A och dess emittans M_{sk} ($P_{sk} = A \cdot M_{sk}$), där emittansen beror av yttemperaturen enligt $M_{sk} = \sigma \cdot T^4$ där $\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ [W/m^2K^4]. Vi får:

$$P_{gl} = P_{sk} = A \cdot M_{sk} = A \cdot \sigma \cdot T^4$$

Bara en sjättedel av glödlampans totala utstrålade effekt strålas ut på sådana våglängder (fotoner) som kan sönderdela syremolekyler. För lysröret, där alla fotoner är av rätt våglängd, krävdes en effekt $P_{lys} = 25$W. För glödlampan krävs alltså:

$$P_{lys} = P_{gl} / 6 \iff P_{gl} = 6 \cdot P_{lys} = 6 \cdot 25 = 150\text{W}$$

Då fås, med arean A = 0,6 cm^2, vilket motsvarar $6 \cdot 10^{-5}$ m^2, följande:

$$P_{gl} = A \cdot \sigma \cdot T^4 \iff T^4 = P_{gl} / A \cdot \sigma = 150/(6 \cdot 10^{-5} \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}) \Rightarrow$$
$$T = 2577 \text{ K} = 2304°\text{C}$$

Svar: *Glödtråden i glödlampan bör ha en yttemperatur på 2300°C*

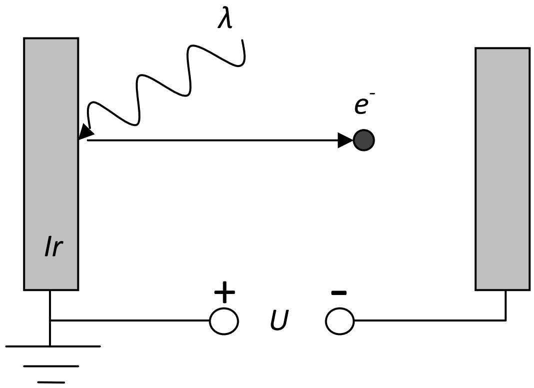
4. Giftiga ämnen skulle också kunna upptäckas och mätas genom att dessa när de fäster på ytan av ett material ger upphov till en ändring i materialets utträdesarbete, *Φ*.

En bit av metallen kalium som har ett utträdesarbete Φ på 2,29 eV belyses med ljus av våglängden 380 nm varvid elektroner frigörs från metallbiten. De frigjorda elektronerna accelereras mot en detektor över spänningen 5 V.

a) Vilken fart v har elektronerna omedelbart innan de når detektorn?

(3p)

Om man i uppställningen nedan belyser en ren yta av metallen iridium (Ir), för vilken utträdesarbetet Φ inte är känt, med ljus av en viss våglängd λ krävs det en spänning på 1,1 V mellan iridiummetallen och en annan metallplatta för att bromsa elektroner som frigjorts från iridiummetallen (med rörelseriktning vinkelrätt ut från iridiummetallens yta) till vila. Efter att det giftiga ämnet A fäst på iridiummetallens yta krävs det en spänning på 1,7 V för att bromsa elektronerna till vila då iridium belyses med ljus av samma våglängd λ som tidigare.



b) Beräkna hur mycket utträdesarbetet ändras då ämne A fäster på iridiummetallens yta. Motivera genom att redogöra för beräkningarna!

(1p)

Lösningsförslag:

a) Fotonerna som når kaliummetallens yta har var och en energin:

$$E = h\cdot f = h\cdot c/\lambda = 6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3\cdot 10^{8}/3{,}80\cdot 10^{-7}\ [J] = 5{,}23\cdot 10^{-19}\ [J] = 3{,}27\ [eV]$$

För att frigöra en elektron då en foton absorberas av metallen krävs en energimängd motsvarande utträdesarbetet ϕ och ev överskott omvandlas till rörelseenergi $E_{k,1}$ hos elektronen, enligt:

$$E_{k,1} = E_{foton} - \phi = 3{,}27 - 2{,}29 = 0{,}98\ [eV]$$

Den frigjorda elektronen har alltså rörelseenergin 0,98 eV och accelereras sedan över spänningen 5V, d.v.s. den tillförs en rörelseenergi $E_{k,2}$ på

$$E_{k,2} = q\cdot U = 1\ \text{elementarladdning}\cdot 5V = 5\ eV.$$

Den totala rörelseenergin E_k fås då som summan av de båda: 5 + 0,98 = 5,98 eV. Vilket räknat i Joule motsvarar $9{,}57\cdot 10^{-19}$ [J]. Följande samband råder mellan en elektrons rörelseenergi och dess fart v:

$$E_k = m\cdot v^2/2 \;\Leftrightarrow\; v = \sqrt{(2\cdot E_k/m)} = \sqrt{(2\cdot 9{,}57\cdot 10^{-19}/9{,}11\cdot 10^{-31})} = 1{,}45\cdot 10^{6}\ [m/s]$$

Svar: *Elektronen får farten* $1{,}45\cdot 10^{6}$ m/s

b) Samma samband som ovan gäller fortfarande för de frigjorda elektronerna:

$$E_k = E_{foton} - \phi$$

Om de frigjorda elektronerna ska bromsas till vila gäller att all rörelseenergi gått åt vid inbromsningen, d.v.s. de frigjorda elektronernas rörelseenergi måste vara exakt lika stor som den energi det kostar för dem att röra sig över en viss spänning U. Denna energi ges av:

$$E_k = q\cdot U$$

Man får $E_{foton} - \phi = q\cdot U$ och för de olika fallen när ämnet har (ϕ_m) eller inte har (ϕ_u) adsorberat till ytan på iridiummetallen:

$$E_{foton} - \phi_u = q\cdot U_u \quad ; \quad E_{foton} - \phi_m = q\cdot U_m \quad \Leftrightarrow$$

$$\phi_u = E_{foton} - q\cdot U_u \quad ; \quad \phi_m = E_{foton} - q\cdot U_m \quad \Leftrightarrow$$

$$\Delta\phi = \phi_m - \phi_u = E_{foton} - q\cdot U_m - (E_{foton} - q\cdot U_u) = q\cdot(U_m - U_u)$$

Med insättning av värden fås:

$$\Delta\phi = q\cdot(U_m - U_u) = q\cdot(1{,}1 - 1{,}7) = -0{,}6\ [eV]\ (= -9{,}6\cdot 10^{-20}\ J)$$

Svar: *Utträdesarbetet har minskat med 0,6 eV*

5. Vad som händer med själva metallytan i uppgift 4 då ett ämne (exempelvis en giftig gas) fäster på dess yta kan man undersöka genom att belysa ytan med röntgenljus och t.ex. studera energierna för övergångar mellan olika energinivåer/ energiband. Väldefinierat röntgenljus kan framställas i en synkrotron genom att laddade partiklar, t.ex. elektroner, accelereras till höga hastigheter och sedan fås att röra sig i en cirkulär bana varvid de avger röntgenstrålning.

Säg att elektronerna accelererats till en hastighet på $2{,}7 \cdot 10^8$ m/s och i sin bana i genomsnitt avger en röntgenfoton med energin 1,2 keV var 7:e nanosekund (sett från elektronerna) som sänds mot något material som ska analyseras.

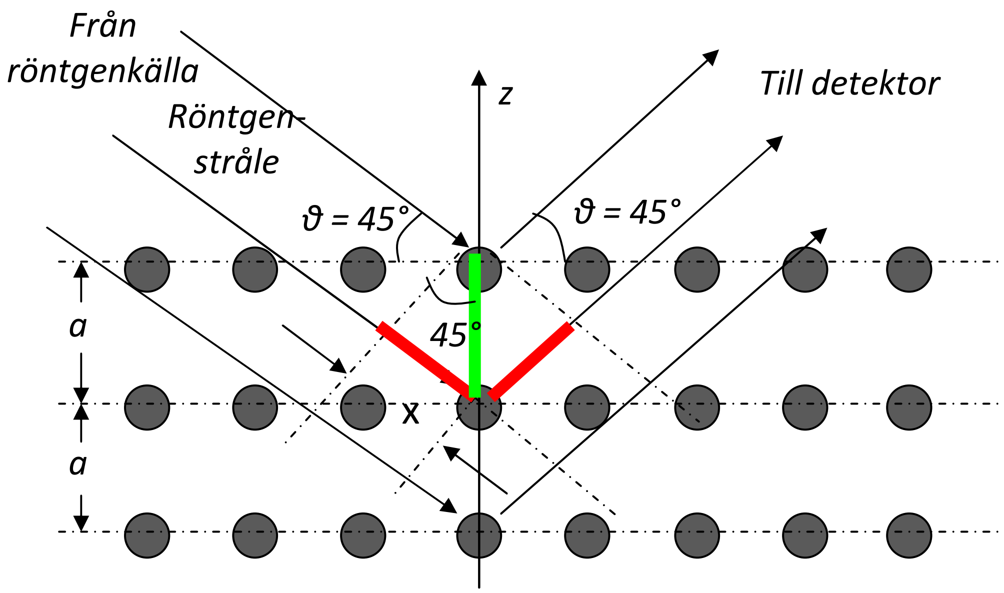
a) *Vilken strålningseffekt kommer enligt laboratoriepersonalen vid synkrotron-anläggningen att skickas mot materialet?*

(3p)

Man använder den genererade röntgenstrålningen för att ta reda på hur långt det är mellan atomerna i z-led i metallytan, se figur nedan. När vinkeln ϑ från röntgenkällan mot metallytan ökas från 0° fås för första gången ett maximum avseende styrkan på röntgenljuset vid detektorn då $\vartheta = 45°$.

b) *Vilket värde på avståndet a mellan atomerna i z-led i materialet ger ovanstående mätning?*

(1p)



Lösningsförslag:

a) Sett från elektronerna kommer det i genomsnitt att gå tiden $7 \cdot 10^{-9}$ sekunder mellan en foton sänds ut tills nästa sänds ut. Elektronerna färdas dock med väldigt hög hastighet då fotonerna sänds ut, $v = 2{,}7 \cdot 10^{8}$ m/s. Det innebär att laboratoriepersonalen, som ju inte följer med elektronerna och därmed inte är deltagare i händelsen utan observatörer, kommer att mäta upp en annan genomsnittlig tid mellan det att två fotoner sänds ut. Denna tid fås genom att observera att elektronerna skulle mäta egentiden t_0 och att tiden t som laboratoriepersonalen mäter ges av:

$$t = t_0 / \sqrt{(1 - v^2/c^2)} = 7 \cdot 10^{-9} / \sqrt{(1 - 2{,}7^2/3^2)} = 1{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Varje röntgenfoton har energin 1,2 keV = $1{,}92 \cdot 10^{-16}$ J och i genomsnitt avges en sådan under tiden $1{,}6 \cdot 10^{-8}$ s, d.v.s. den uppmätta strålningseffekten fås som

$$P = E/\Delta t = 1{,}92 \cdot 10^{-16} / 1{,}6 \cdot 10^{-8} = 1{,}2 \cdot 10^{-8} \text{ W}$$

Svar: *Strålningseffekten är 12 nW*

b) Från figur ovan kan man se att de vågor som ”reflekterats” mot atomer längre ner i materialet kommer att behöva gå en längre sträcka än de som ”reflekterats” längre upp. I figur ovan kan man se att de vågor som ”reflekterats” på djupet a i materialet har fått gå en sträcka motsvarande de röda strecken längre än de som ”reflekterats” mot ytan. Längden x av ett sådant streck kan m.h.a. trigonometri räknas ut som

$$\sin 45 = x/a \Leftrightarrow a = x/\sin 45$$

Maximum fås för en vinkel på 0° och nästa gång maximum på det reflekterade ljuset fås är när vinkeln ökats till 45°. För detta första maximum efter det vid 0° måste gälla att den våg som reflekterats på djupet a har gått exakt en våglängds längre sträcka än den som reflekterats på ytan eftersom dessa då är i fas med varandra och interfererar konstruktivt (lägger ihop till något stort => ljusmaximum). Summan av de två röda strecken är då en hel våglängd, vilket ger att ett rött streck är en halv våglängd, d.v.s. $x = \lambda/2$.

$$a = \lambda/(2 \cdot \sin 45)$$

För att få fram sträckan a behövs då bara röntgenljusets våglängd som fås från fotonenergin på 1,2 keV enligt

$$E = h \cdot f = h \cdot c/\lambda \Leftrightarrow \lambda = h \cdot c/E = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8} / (1{,}2 \cdot 10^{3} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}) \text{ [m]} = 1{,}03 \cdot 10^{-9} \text{ [m]} = 1{,}0 \text{ nm}$$

Sträckan a kan därvidlag räknas fram från

$$a = \lambda/(2 \cdot \sin 45) = \lambda/(2 \cdot 1/\sqrt{2}) = \lambda/\sqrt{2} = 1{,}03 \cdot 10^{-9} /\sqrt{2} = 7{,}32 \cdot 10^{-10} \text{ [m]} = 7{,}3 \text{ Å}$$

Svar: *Avståndet a är 7,3 Å (0,73 nm)*

6. Ett sätt att uppskatta när t.ex. Island reste sig ur havet genom vulkanisk aktivitet är att studera fördelningen mellan isotoperna ^{40}Ar och ^{40}K i de vulkaniska bergarterna på Island. Eftersom Argon (Ar) är en ädelgas och inte bildar föreningar med andra ämnen kommer Argon att försvinna som gas ut i atmosfären från smälta bergarter, d.v.s. lavan, och därmed inte förekomma i nyligen stelnad lava. ^{40}K (Kalium-40) som kan finnas i den stelnade lavan omvandlas dock sakta genom betasönderfall till ^{40}Ar som är fångad inne i den stelnade bergarten. All ^{40}Ar som finns inuti en sådan bergart härstammar alltså med all säkerhet från ^{40}K. Halveringstiden för ^{40}K är $1{,}25 \cdot 10^9$ år.

Den största kvot mellan isotoperna ^{40}Ar och ^{40}K som man funnit i någon vulkanisk bergart på Island är1:99, d.v.s. om man skulle räkna på det sammanlagda antalet ^{40}Ar- och ^{40}K-atomer i denna bergart skulle det idag för varje 100 atomer finnas 1 st ^{40}Ar- och 99 st ^{40}K-atomer.

a) *När kan man förmoda att Island började resa sig ur havet?*

(3p)

^{40}K finns också naturligt i människokroppen. En vuxen människa har ungefär 160 g kalium i kroppen varav 0,0117% utgörs av ^{40}K.

b) *Hur mycket energi frigörs i en vuxen människas kropp varje dag genom att ^{40}K omvandlas till ^{40}Ar genom betasönderfall? Eventuella kärnfysikaliska data hämtas ur tabell i formelsamlingen.*

(1p)

Lösningsförslag:

a) Från början fanns det bara ^{40}K-atomer i bergarten, men över tiden har en viss andel omvandlats till ^{40}Ar. Fram tills idag har i genomsnitt 1 av 100 ^{40}K omvandlats till ^{40}Ar, d.v.s. av ursprungligen 100 ^{40}K-atomer finns det bara 99 kvar. Det ger följande input till att beräkna hur lång tid som förflutit

$$N = 99,\ N_0 = 100,$$
$$T_{1/2} = 1{,}25\cdot10^9 \text{ år} \Rightarrow \lambda = \ln2/\ T_{1/2} = \ln2/\ 1{,}25\cdot10^9 = 5{,}55\cdot10^{-10}\ [\text{år}^{-1}]$$

Med hjälp av sönderfallslagen kan då tiden som förflutit räknas ut.

$$N = N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t} \Rightarrow N/N_0 = e^{-\lambda\cdot t} \Rightarrow \ln(N/N_0) = -\lambda\cdot t \Rightarrow t = -\ln(N/N_0)/\lambda \Rightarrow$$

$$t = -\ln(99/100)/5{,}55\cdot10^{-10} = 1{,}81\cdot10^7\ [\text{år}] = 18 \text{ miljoner år}$$

Svar: *Man kan förmoda att Island började resa sig ur havet för 18 miljoner år sedan*

b) Från uppgiftstexten har vi informationen att halveringstiden för ^{40}K är $1{,}25\cdot10^9$ år. Detta är en så lång tid att man kan utgå ifrån att mängden som sönderfaller under en månad i genomsnitt inte kommer att vara annorlunda än månaden efter, eller ens månaden efter det. Därför borde aktiviteten vara konstant över ett dygn som det var frågan om här, ja t.o.m. över ett helt år (Dessutom är halten ^{40}K relativt sett konstant i människokroppen då nya kalium-atomer hela tiden tillförs). Genom aktiviteten kan antalet sönderfall per dygn därför räknas ut. Aktiviteten fås från:

$$A = \lambda\cdot N$$

Sönderfallskonstanten λ har redan räknats ut i a). Antalet ^{40}K i människokroppen räknas ut från totala massan och massan av en ^{40}K, som är 39,96399848 [u] = $39{,}96399848\cdot1{,}660539\cdot10^{-27}$ [kg] = $6{,}636178\cdot10^{-26}$ kg. Totala massan ^{40}K i kroppen är 0,160 [kg] · 0,000117 = $1{,}872\cdot10^{-5}$ kg. Antalet ^{40}K i kroppen fås då till $1{,}872\cdot10^{-5}/6{,}636178\cdot10^{-26} = 2{,}821\cdot10^{20}$ st.

Aktiviteten räknat i sönderfall per år blir då:

$$A = \lambda\cdot N = 5{,}55\cdot10^{-10}\cdot2{,}821\cdot10^{20} = 1{,}57\cdot10^{11} \text{ sönderfall/år}$$

Och under ett dygn fås antalet sönderfall då till:

$$A = 1{,}57\cdot10^{11}/365 = 4{,}29\cdot10^8 \text{ sönderfall/dygn}$$

Hur mycket energi som totalt frigörs under ett dygn beror förutom på antalet sönderfall per dygn också på hur mycket som frigörs i varje sönderfall, vilket kan räknas fram från masskillnaden mellan det som finns före och efter sönderfallet.

$$^{40}K \rightarrow {}^{40}Ar + e^{+} + \text{energi} \quad \text{(neutrinon kan försummas)}$$

$$m(^{40}K) = \text{massan för } {}^{40}K\text{-kärnan} + 19 \text{ elektroner}$$

$$m(^{40}Ar) = \text{massan för } {}^{40}Ar\text{-kärnan} + 18 \text{ elektroner}$$

Eftersom den extra elektronen som ingår i atommassan för ^{40}K inte försvinner kommer den att finnas kvar också i högra ledet av reaktionsformeln vilket vi måste kompensera för:

$$m(^{40}K) \rightarrow m(^{40}Ar) + m(e^{-}) + m(e^{+})$$

Nu är elektron- och positronmassan densamma så det hela kan skrivas:

$$m(^{40}K) \rightarrow m(^{40}Ar) + 2\cdot m(e^{-})$$

$$\Delta m = m(^{40}K) - m(^{40}Ar) - 2\cdot m(e^{-}) =$$
$$39{,}96399848 - 39{,}962383123 - 2\cdot 0{,}000548580 =$$
$$5{,}182\cdot 10^{-4} \text{ [u]} = 8{,}605\cdot 10^{-31} \text{ [kg]}$$

Den frigjorda energin fås från:

$$E = m\cdot c^2 = 8{,}605\cdot 10^{-31}\cdot(2{,}998\cdot 10^{8})^2 = 7{,}734\cdot 10^{-14} \text{ J/sönderfall}$$

Den totalt frigjorda energin under ett dygn fås då till:

$$E_{tot} = 7{,}734\cdot 10^{-14}\cdot 4{,}29\cdot 10^{8} = 3{,}32\cdot 10^{-5} \text{ J} = 33\mu\text{J}$$

Svar: *Totalt frigörs i människokroppen 33µJ varje dygn från ^{40}K-sönderfall*