Linköpings Universitet
Institutionen för Fysik, Kemi, och Biologi
Avdelningen för Tillämpad Fysik
Mike Andersson

Lösningsförslag - Tentamen

Måndagen den 21:e maj 2012, kl 14:00 – 18:00

Fysik del B2 för tekniskt / naturvetenskapligt basår / bastermin

BFL 122 / BFL 111

Tentamen består av totalt 6 uppgifter där varje korrekt löst uppgift belönas med 4 poäng. Maximal skrivningspoäng är 24.

Hjälpmedel: Miniräknare och valfri formelsamling

Tänk på att:

- Varje inlämnat lösningsblad skall vara numrerat och märkt med AID-nummer.
- Endast lösningen till **EN** uppgift får redovisas på varje blad/ papper
- Inlämnade lösningar skall vara renskrivna och läsbara
- Alla lösningar skall vara välmotiverade
- En figur/ skiss underlättar alltid lösningsprocessen samt förståelsen av lösningen.

OBSERVERA: ***Själva frågan som ska besvaras för varje uppgift är given i kursiv stil***

Jag kommer att finnas till hands under själva tentamenstiden för att svara på frågor angående eventuella oklarheter i problemformuleringarna. Om jag inte finns på plats i ett visst ögonblick kan jag nås på tel. nr. 0762-672281 under skrivningstiden.

Lösningsförslag kommer att läggas upp på kurshemsidan efter skrivningstidens slut.

Preliminära betygsgränser:	5	20-24 p
	4	15-19 p
	3	10-14 p

Lycka till!! //Mike

1. När man går på ultraljudsundersökning, t.ex. under en graviditet, så skickas ultraljudsvågorna in i kroppen genom en liten platta som trycks mot huden (se Fig. 1a). Plattan är fastklämd i (p) och (q) i Fig. 1a men fri att röra sig i ovan- och undersidan. En våg skickas genom den, som visat i Fig. 1a, där vågens frekvens skruvas upp tills man för första gången får en stående våg i plattan. Plattan är endast 2,9mm tjock och vågens utbredningshastighet i plattan är 11200m/s

> a) *För vilken frekvens fås för första gången en stående våg i plattan?*

(3p)

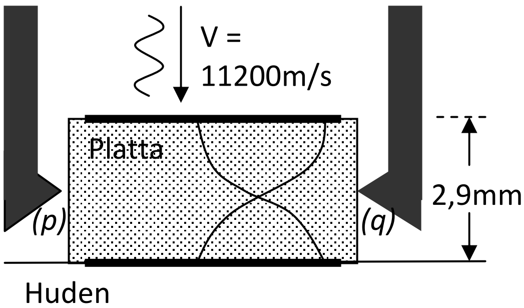


Fig. 1a

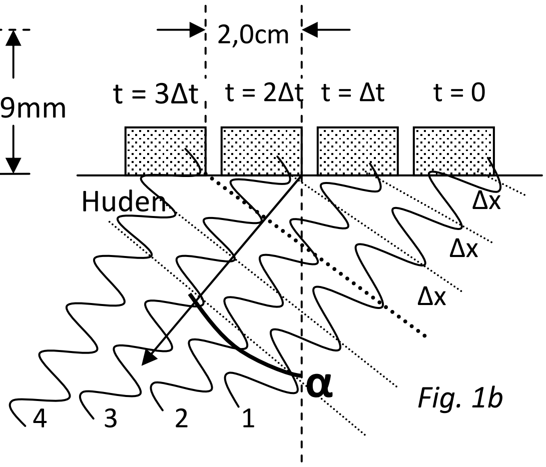


Fig. 1b

Man kan få en bild av hur vävnaden och olika organ i kroppen ser ut genom att flytta plattan över huden och läsa av styrkan hos den våg som reflekterats mot olika vävnader och organ på olika djup in i kroppen. Men man kan också använda sig av många sådana små plattor som man inte flyttar runt. Istället skickar man ut en puls/ mycket kort våg från var och en av plattorna i Fig. 1b, med början längst till höger och med en liten tidsfördröjning Δt mellan var och en av dem, så att pulsen/vågen nr 1 längst till höger skickas ut $3 \cdot \Delta t$ före den längst till vänster, nr 4, och därmed hinner utbreda sig en sträcka $3 \cdot \Delta x$ in i huden innan pulsen från nr 4 sänds ut. Då fås istället maximal styrka på pulsen/vågen i en viss riktning in genom huden och genom att ändra värdet på Δt kan man scanna vågen över ett ganska stort område. Säg att det är 2cm mellan två intill varandra liggande plattor, att vågornas utbredningshastighet i huden är 5600m/s och att Δt i ett visst ögonblick är $2 \cdot 10^{-6}$s.

> b) *I vilken riktning* ***α*** *kommer den mycket korta ultraljudsvågen/ pulsen i Fig. 1b att ha sitt maximum?*

(1p)

Lösningsförslag:

(a) När frekvensen ökas kommer våglängden att bli kortare och vid något tillfälle kommer den att bli tillräckligt kort för att det ska kunna bildas en nod där plattan är fastklämd och bukar i dess ovan- och undersida, där plattan kan röra sig fritt (enligt Figur 1). Från figur kan man då se att plattans tjocklek motsvarar en halv våglängd hos vågen, d.v.s.

$$\lambda/2 = 2{,}9\text{mm} \Rightarrow \lambda = 5{,}8\text{mm} = 5{,}8\cdot 10^{-3}\text{m}$$

Vågens utbredningshastighet är 11200m/s varför vi från sambandet

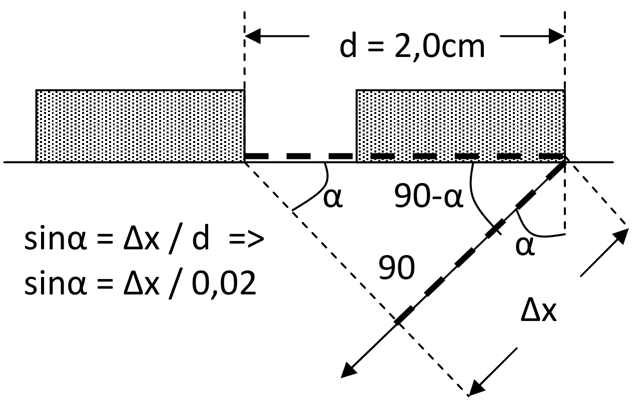
$$v = f\cdot\lambda \Rightarrow f = v/\lambda$$

får att frekvensen för den första stående vågen fås till

$$f = 11200/5{,}8\cdot 10^{-3} = 1{,}93\cdot 10^{6}\ [s^{-1}]$$

Svar: Frekvensen är 1,9 MHz

(b) Enligt information i uppgiften kommer man att få ett maximum i riktningen α när pulserna/ de mycket korta vågorna skickas ut med ett tidsmellanrum på $2\cdot 10^{-6}$s. Detta beror på att de pulser som skickats ut först redan hunnit färdas en viss sträcka in i huden när de sista pulserna skickas ut. Enligt Figur 1b kommer pulsen/ den mycket korta vågen 3 att ha hunnit färdas sträckan Δx in i huden när pulsen 4 skickas ut. Det är denna skillnad i sträcka som ger upphov till att pulserna är i fas i riktningen α. Från figur nedan kan man se att vinkeln α kan räknas fram från avståndet 2,0cm mellan plattorna och Δx



Δx fås i sin tur från att hastigheten för pulsen i huden är 5600m/s och att pulsen 3 hinner färdas sträckan Δx under tiden $\Delta t = 2 \cdot 10^{-6}$s innan puls 4 skickas ut. För Δx fås då enligt $s = v \cdot t$:

$$\Delta x = v \cdot \Delta t = 5600 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 0{,}0112 \text{ (1,12cm)}$$

Och för vinkeln får vi så slutligen:

$$\sin\alpha = 0{,}0112/0{,}02 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 34°$$

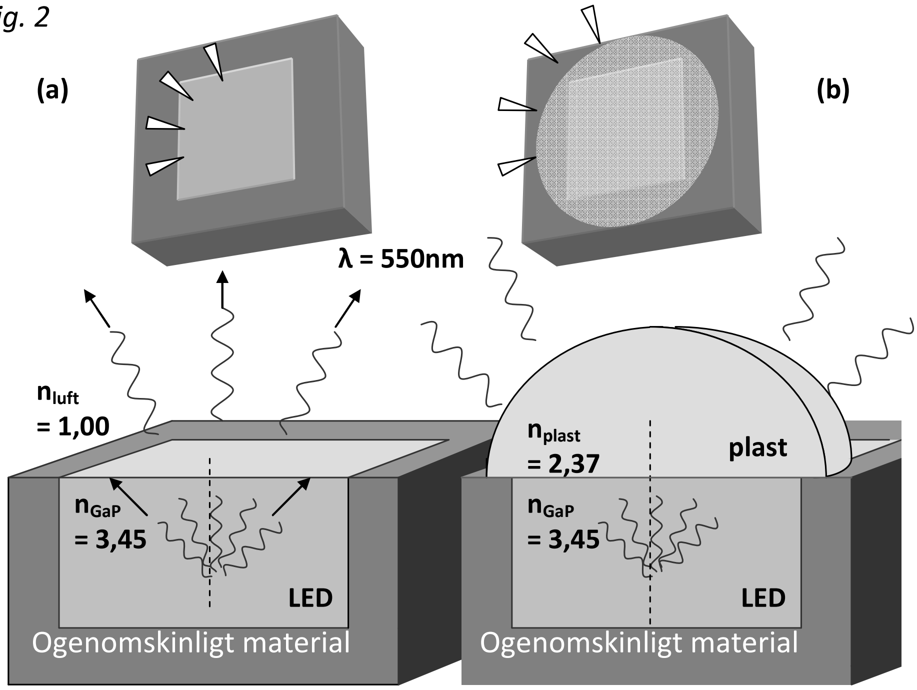
Svar: Maximum fås i riktningen α = 34°

2. I många displayer såväl som nyare ficklampor sitter det ofta en typ av ljuskälla/ lampa som går under förkortningen LED (Light Emitting Diode). En sådan LED kan vara gjord i lite olika material, som vart och ett sänder ut ljus med en viss våglängd, men ett exempel utgörs av GaP (Galliumfosfid) som sänder ut ljus av våglängden 550nm (grönt ljus). Galliumfosfid har ett brytningsindex n_{GaP} på 3,45 och ett exempel på en sådan LED ges i Fig. 2(a) där ett litet GaP-chip är inkapslat i ett ogenomskinligt material så att ljus bara kan ta sig ut genom ovansidan på chip:et (ljuset absorberas i det ogenomskin-liga materialet). Själva ljuset kan antas bildas i en punkt i mitten av chip:et.

a) *Om man kunde sitta inuti chip:et, skulle man då med våra ögon se detta som synligt ljus inuti GaP-chip:et och vilken färg skulle det isåfall ha? Motivera med att visa beräkningen!*

(3p)

Fig. 2



Bl.a. för att skydda LED:n brukar man direkt på själva LED-chip:et gjuta på en halvsfär i genomskinlig plast, som visas i Fig. 2(b). Antag att denna plast har brytningsindex n_{plast} = 2,37, är en perfekt halvsfär och att inget ljus absorberas i den. Antag också att ljuset bildas i en punkt i mitten av chip:et och att vi kan säga att LED-chip:ets ovansida nås av lika mycket ljus per ytenhet över hela dess yta.

b) *Kommer det ut mindre, lika mycket eller mer ljus från LED:n med plast ovanpå jämfört med den utan? Motivera med en kort beräkning och ev. skiss!*

(1p)

Lösningsförslag:

(a) Enligt figur sänder en LED i Galliumfosfid (GaP) ut ljus som i luft har våglängden 550nm (grönt) och utbredningshastigheten c:a $3\cdot10^8$m/s. Detta ljus färdas också en liten sträcka inne i materialet där dess utbredningshastighet är lägre. Frekvensen på ljuset är dock densamma, vilket gör att våglängden för ljuset inne i materialet inte är densamma som i luften. Vi får följande samband:

$$c_{ämne} = c_o/n_{ämne} \;\Rightarrow\; c_{GaP} = c_o/n_{GaP} \;\Rightarrow\; c_{GaP} = 3{,}0\cdot10^8/3{,}45 = 8{,}7\cdot10^7\text{m/s}$$

$$c = f\cdot\lambda \;\Rightarrow\; c_{luft} = f\cdot\lambda_{luft} \;\Rightarrow\; f = c_{luft}/\lambda_{luft} = 3{,}0\cdot10^8/5{,}50\cdot10^{-7} = 5{,}5\cdot10^{14}\,[s^{-1}]$$

$$c = f\cdot\lambda \;\Rightarrow\; c_{GaP} = f\cdot\lambda_{GaP} \;\Rightarrow\; \lambda_{GaP} = c_{GaP}/f = 8{,}7\cdot10^7/5{,}5\cdot10^{14} = 1{,}6\cdot10^{-7}\text{m}$$

Man får alltså att våglängden för ljuset inne i materialet är c:a 160nm, vilket om vi relaterar till ljusvågen i luft skulle ligga utanför det synliga området. Egentligen är det som våra ögon uppfattar själva frekvensen hos ljuset och eftersom denna inte är annorlunda i materialet som utanför skulle man fortfarande uppfatta ljuset som grönt om man kunde befinna sig inuti materialet.

Svar: Våglängden på ljuset inuti GaP är c:a 160nm, vilket i luft skulle ligga utanför det synliga området, men eftersom det våra ögon uppfattar är frekvensen skulle man fortfarande se ljuset som grönt också inuti GaP-chip:et.

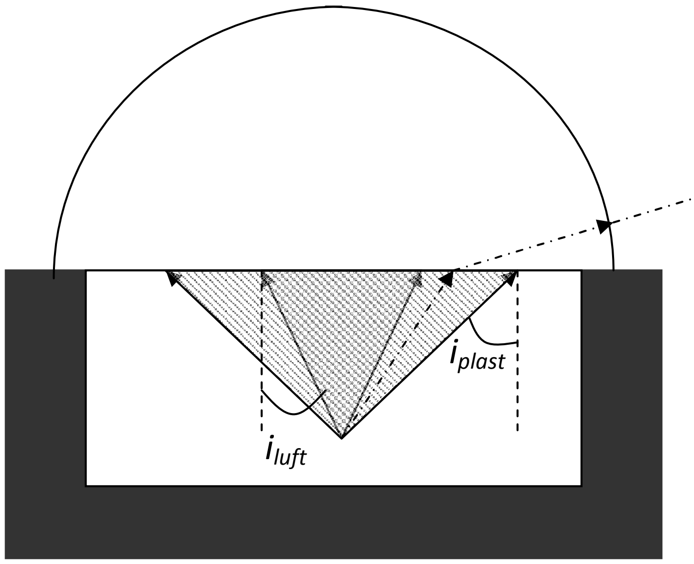
(b) Om ljuset skickas ut från mitten av GaP-chip:et kommer det mesta av ljuset att infalla mot den övre ytan på chip:et (ininfrån alltså) i någon vinkel *i* (se figur nedan). Ljuset kommer då att brytas när det lämnar GaP-materialet. Om brytningsvinkeln är större än infallsvinkeln kan dock det inträffa att man kan få totalreflexion i ytan genom att brytningsvinkeln skulle bli 90° eller större. Om man tar det specifika fallet att brytningsindex är 3,45 för GaP, och jämför med de båda fallen att brytningsindex är 2,37 för plasten och 1,00 för luft så får vi för de infallsvinklar för vilka totalreflexion inträffar:

$$n_i \sin i = n_b \sin b \;\Rightarrow$$

1) $3{,}45\cdot\sin i_{luft} = 1{,}00\cdot\sin 90 \;\Rightarrow\; \sin i_{luft} = 1{,}00\cdot1/3{,}45 \;\Rightarrow\; i_{luft} = 16{,}8°$

2) $3{,}45\cdot\sin i_{plast} = 2{,}37\cdot\sin 90 \;\Rightarrow\; \sin i_{plast} = 2{,}37\cdot1/3{,}45 \;\Rightarrow\; i_{plast} = 43{,}4°$

Man får alltså totalreflexion för mycket mindre vinklar när GaP-chip:et gränsar mot luft jämfört med mot plasten. Vi ser då från figur nedan att en större ”kon” av ljus kan ta sig ut ur GaP-chip:et när det är täckt med plast, och eftersom lika mycket ljus skickas ut i alla riktningar kommer mer ljus att passera ut genom denna yta om den är täckt med plast jämfört med bara gränsar till luft. Eftersom plasten sedan är halvsfärisk kommer allt ljus som kommer in i denna halvsfär från GaP-chip:et att kunna ta sig ut i luften utan några förluster då infallsvinkeln alltid blir 0° mot normalen till ytan (se figur).



Svar: Det kommer att komma ut mer ljus från LED:n när den är täckt med plast jämfört med om den bara gränsar till luft

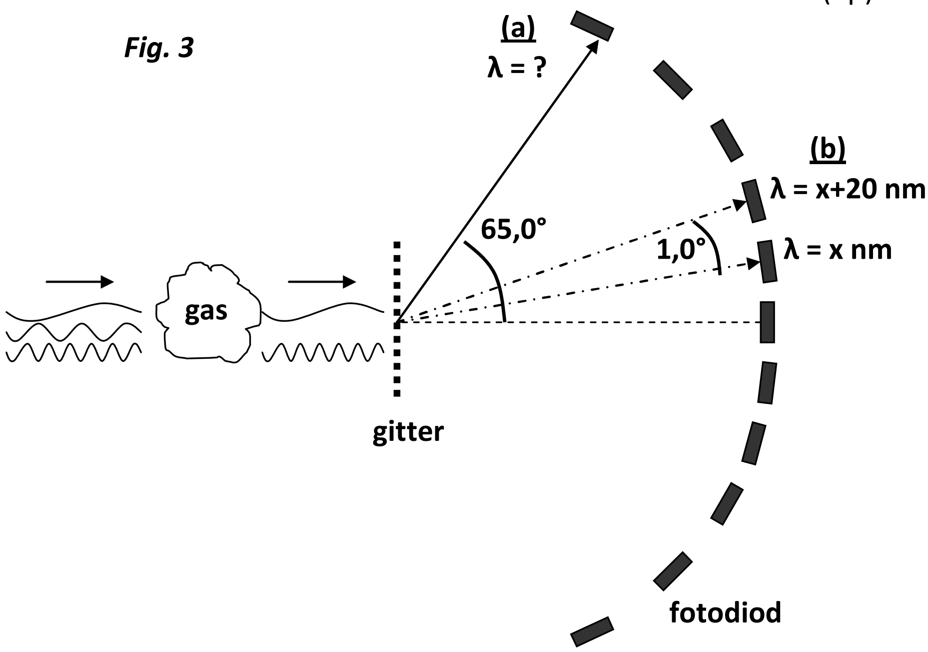
3. Ett sätt att lista ut vilket/vilka grundämnen (vilken/vilka atomer) som finns i en gas är att skicka ljus genom gasen och titta på vilken/vilka våglängder på ljuset som har minskat i styrka efter att det har passerat genom gasen. Varje atom absorberar ju ljus av specifika våglängder, så om en sådan särskild våglängd absorberats och minskat i styrka kan man tala om vilken atom som finns i gasen. Man måste då kunna mäta på varje våglängd för sig och det kan man göra genom att dela upp ljuset i ett gitter som i Fig. 3 nedan. Ljusstyrkan i alla olika riktningar kan mätas t.ex. med fotodioder som placerats i en halvcirkel bakom gittret och jämföras mellan då ljuset passerat gasen och när den inte gjort det. För att få så bra mätningar som möjligt används bara första ordningens spektrum, d.v.s. n = 1 (ibland skrivet k = 1).

Säg nu att man i ett sådant experiment använt ett gitter med gitter-konstanten 0,65µm och fått att ljusstyrkan i riktningen 65,0° bakom gittret minskat i styrka (<u>(a)</u> i Fig. 3 nedan).

a) *Vilken våglängd på ljuset har absorberats i gasen och minskat i styrka, d.v.s. vilken våglängd på ljuset har normalt maximum i riktningen 65,0° i första ordningens spektrum om ljuset passerat ett gitter med gitterkonstanten 0,65µm?*

(3p)

Fig. 3



b) *Vilket är det största värde man kan ha på gitterkonstanten om man över hela det synliga våglängdsområdet (400-750nm) vill ha minst 1,0° vinkel mellan ljusmaxima för våglängder som är separerade med 20nm (se <u>(b)</u> i Fig. 3 ovan)?*

(1p)

Lösningsförslag:

(a) Gitterformeln ger oss direkt:

$d \cdot \sin\alpha_n = n \cdot \lambda$ där n i detta fall är 1 (första ordningens spektrum)

Insättning av $d=0{,}65\mu m$ och $\alpha_1=65°$ ger:

$\lambda = d \cdot \sin\alpha_1 = 6{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot \sin 65 = 5{,}89 \cdot 10^{-7} m = 590nm$

Svar: Våglängden är 590nm

(b) För att få minst 1,0° separation mellan maxima för två våglängder som det är 20nm skillnad på över hela det synliga våglängdsområdet (400-750nm) måste man kunna separera våglängderna 400 och 420nm med åtminstone 1,0° samt tillse att 750nm i första ordningens spektrum inte hamnar på större vinklar än 90° (då kan man ju inte se maximum för 750nm). Med användande av gitterformeln fås att följande måste gälla:

$$d \cdot \sin\alpha = 0{,}400 \quad \text{(räknat i µm)}$$

$$d \cdot \sin(\alpha + 1) = 0{,}420 = d(\sin\alpha\cos 1 + \cos\alpha\sin 1) = 0{,}420$$

Om man löser ut d (= 0,400/sinα) i första sambandet och sätter in i andra fås:

$$(0{,}400/\sin\alpha) \cdot (\sin\alpha\cos 1 + \cos\alpha\sin 1) = 0{,}420 \Rightarrow$$

$$\cos 1 + \sin 1 \cdot \cos\alpha/\sin\alpha = 0{,}420/0{,}400 \Rightarrow$$

$$\cos\alpha/\sin\alpha = (0{,}420/0{,}400 - \cos 1)/\sin 1 \Rightarrow$$

$$\sin\alpha/\cos\alpha = \sin 1/(0{,}420/0{,}400 - \cos 1) \Rightarrow$$

$$\tan\alpha = \sin 1/(0{,}420/0{,}400 - \cos 1) = 0{,}348 \Rightarrow$$

$$\alpha = 19{,}19°$$

Insättning av denna vinkel i d = 0,400/sinα ger

$$d = 0{,}400/\sin 19{,}19 = 1{,}22 \; [\mu m]$$

Kontroll av vinkel för 750nm ger : $\sin\alpha = \lambda/d = 0{,}75/1{,}22 \Rightarrow \alpha = 38°$

d.v.s. väl under 90.

Svar: Det största värde man kan ha på gitterkonstanten är 1,2µm

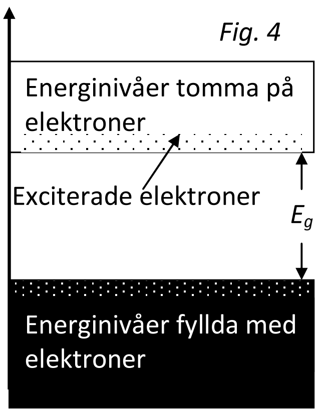
4. Åter till LED:n (på svenska också kallad lysdiod). En LED tillverkas av något halvledarmaterial och elektronernas energinivåer i ett halvledarmaterial kan schematiskt ritas som i Fig. 4. Bandgapsenergin E_g är olika för olika material och i tabell I ges bandgapsenergin för några halvledarmaterial som är vanliga vid tillverkning av LEDs.

a) *Vilket av halvledarmaterialen i tabell I skulle vara mest lämpligt att använda om man vill tillverka en LED som ger blått ljus (450nm < λ < 500nm)?*

(3p)

Fig. 4

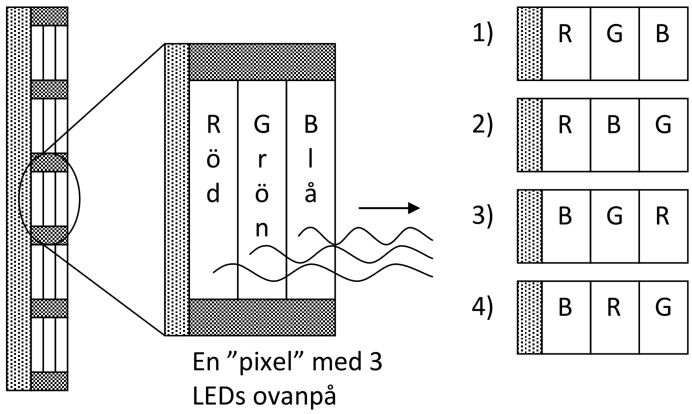
(a)



Tabell I

Material	E_g [eV]
Galliumarsenid	1,42
Galliumarsenidfosfid	<2,18
Aluminiumgallium-fosfid	<2,37
Zinkselenid	2,70
Galliumnitrid	3,40
Kubisk bornitrid	5,20
Diamant	5,50
Hexagonal bornitrid	6,40

(b)



LED display

En "pixel" med 3 LEDs ovanpå varandra

När man tillverkar en LED display kan man kombinera en röd, en grön och en blå LED i en "pixel" och genom att ändra styrkan på ljuset från var och en av dem få nästan vilken färg som helst på ljuset från denna pixel. Genom att lägga dessa tre LEDs ovanpå varandra, så att ljuset från de inre får passera ut genom de yttre kan man spara plats och få en bättre upplösning på displayen.

b) *Skulle det kunna finnas något skäl att något av sätten 1) till 4) i Fig. 4(b) ovan att lägga en röd, en grön och en blå LED på varandra kunde vara lämpligare och vilken kombination skulle det isåfall vara? Motivera ditt svar väl!*

(1p)

Lösningsförslag:

(a) Ljuset bildas genom att elektroner deexciteras från nivåer precis ovanför bandgapet till de få tomma energinivåer som finns i det annars fyllda bandet av energinivåer. Fotonernas energi, som kommer att bestämma ljusets våglängd och färg, kommer då att vara ungefär densamma som bandgapsenergin. Följande samband gäller mellan fotonens energi och våglängd:

$$E = h \cdot c/\lambda \ \ [J]$$

Man kan då räkna fram mellan vilka energier hos fotonerna som vi uppfattar ljuset som blått. Dessa blir då, med utnyttjande av att 1eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$J:

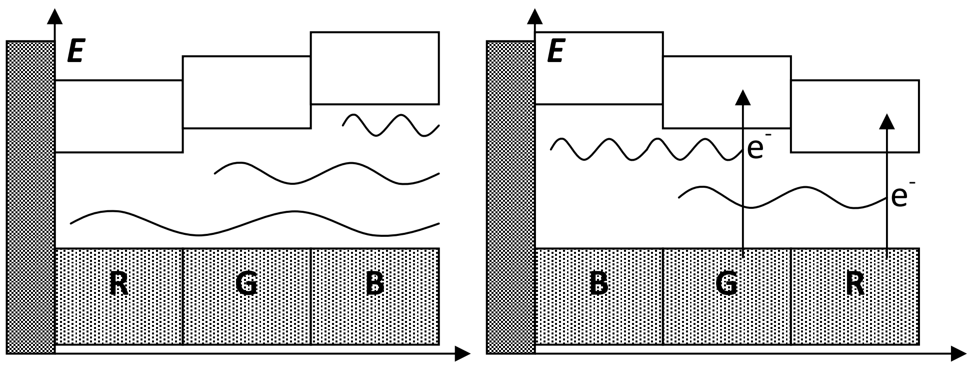
$$E_{450} = h \cdot c/\lambda = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}/4{,}50 \cdot 10^{-7} = 4{,}42 \cdot 10^{-19} \ [J] = 2{,}75 \text{ eV}$$

$$E_{500} = h \cdot c/\lambda = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 2{,}998 \cdot 10^{8}/5{,}00 \cdot 10^{-7} = 3{,}98 \cdot 10^{-19} \ [J] = 2{,}48 \text{ eV}$$

Från tabell kan man då utläsa att den bandgapsenergi som ligger inom detta intervall och alltså ger en våglängd på ljuset som motsvarar blått ljus är den för zinkselenid – ZnSe.

Svar: För framställning av blå LED skulle zinkselenid vara lämpligast

(b) Medelst nedanstående skiss kan man få en övergripande idé om varför kombinationen 1) – ordningen R, G, B – är den bästa, särskilt jämfört med kombination 3:



I figuren till vänster ser man att bandgapsenergierna ökar åt höger och då vi vet att bandgapet motsvarar energin för fotonerna kommer ”röda” fotoner att ha lägre energi än gröna och ”röda” fotoner kan då inte heller excitera elektroner över bandgapet i LEDs som ger grönt eller blått ljus (högre bandgapsenergi, så det krävs mer energi än de ”röda” fotonerna har). ”Gröna fotoner kan inte heller excitera elektroner i LEDs som ger blått ljus. D.v.s. inget av det röda eller gröna ljuset absorberas genom elektronexcitation i de gröna och blå LEDs som ligger utanför.

I figuren till höger däremot räcker energin gott och väl från det blå och gröna ljuset för att excitera elektroner över bandgapet i det gröna respektive röda LED-materialet. D.v.s. ljus från den blå och den gröna LED:n kan absorberas på vägen ut genom att elektroner exciteras över bandgapet.

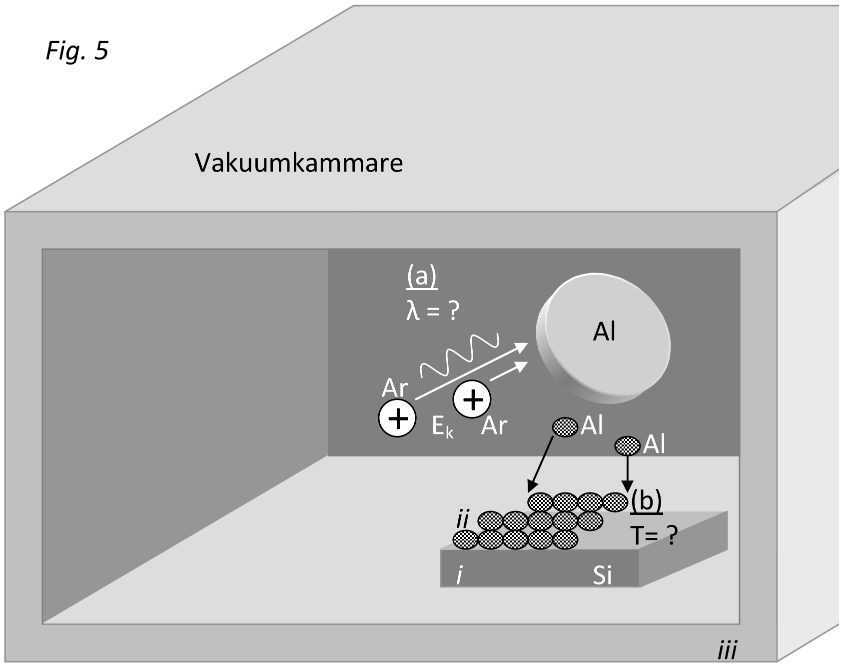
Svar: Kombination 1 – RGB – är den lämpligaste

5. Ett sätt att tillverka ett tunt lager av ett material ovanpå ett annat (som t.ex. ett LED-halvledarmaterial ovanpå ett annat som i uppgift 4) är genom att ”slå ut” atomer ur en bit (normalt i form av en rund skiva) av det material man vill tillverka det tunna lagret av (Aluminium, Al, i Fig. 5). De ”utslagna” atomerna landar sedan ovanpå det andra materialet (*i* i Fig. 5, i detta exempel kisel, Si) och bygger upp ett lager av det nya materialet (*ii* i Fig. 5). Ett sätt att ”slå ut” atomerna är att accelerera joner av grundämnet argon, Ar, mot materialet. När argon-jonerna, Ar^+, kolliderar med atomer i materialet slits dessa loss och åker iväg (”slås ut”) för att sedan landa bl.a. ovanpå det andra materialet. Antag att en argonjon accelererats till rörelseenergin E_k över spänningen 33V och att argonjonens massa m kan sättas till 39,9u, 1u = $1{,}66054 \cdot 10^{-27}$kg.

a) *Hur stor är den accelererade argonjonens våglängd?*

(3p)

Fig. 5



För att få bättre kvalitet på det lager (*ii* i Fig. 5) man vill tillverka kan man, innan man börjar ”slå ut” aluminiumatomer, värma upp det material (*i* i Fig. 5) man önskar tillverka lagret på till en viss temperatur. Det finns ingen termometer e.d. vid/ på det här materialet men både materialet och aluminiumskivan befinner sig i en helt tillsluten vakuumkammare (*iii* i Fig. 5) som det sitter en termometer på. När man värmt upp materialet så att det håller sig vid en konstant temperatur kan man med hjälp av termometern på kammaren konstatera att själva kammaren mottar energin 2,1kJ varje minut.

b) *Vilken temperatur har materialet värmts upp till om det har en sammanlagd yta på $2{,}0 \cdot 10^{-3} m^2$?*

(1p)

Lösningsförslag

(a) En laddad partikel som accelereras över en viss spänning U kommer att få en viss rörelseenergi E_k som motsvaras av:

$$E_k = q \cdot U, \text{ där q är partikelns laddning.}$$

Röreleseenergin kan också skrivas:

$$E_k = m \cdot v^2/2 = m^2 \cdot v^2/2 \cdot m = //p=m \cdot v// = p^2/2 \cdot m$$

En partikels ”våglängd” är kopplad till dess rörelsemängd genom:

$$p = h/\lambda$$

Detta ger oss följande samband mellan rörelseenergi och våglängd:

$$E_k = p^2/2 \cdot m = h^2/(\lambda^2 \cdot 2 \cdot m)$$

Detta kan vi sedan sätta samman med sambandet mellan E_k och U:

$$q \cdot U = h^2/(\lambda^2 \cdot 2 \cdot m) \Leftrightarrow \lambda^2 = h^2/(2 \cdot m \cdot q \cdot U) \Rightarrow \lambda = h/\sqrt{(2 \cdot m \cdot q \cdot U)}$$

Massan hos en argonjon är c:a 39,9u, d.v.s. $39{,}9 \cdot 1{,}66054 \cdot 10^{-27} = 6{,}63 \cdot 10^{-26}$kg. Med insättande av numeriska värden fås:

$$\lambda = h/\sqrt{(2 \cdot m \cdot q \cdot U)} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}/\sqrt{(2 \cdot 6{,}63 \cdot 10^{-26} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 33)} = 7{,}9 \cdot 10^{-13}\text{m}$$

Svar: Argonjonens våglängd blir 0,79pm

(b) All energi som tas emot av kammaren är den som strålats ut från materialet *i* inuti kammaren (kiselskivan) i form av värmestrålning. Under en minut strålas det alltså ut 2,1kJ. Detta innebär att det under varje sekund utstrålas $2{,}1 \cdot 10^3/60 = 35$J och att den utstrålade effekten alltså är 35W. Denna strålas ut från den totala ytan $2{,}0 \cdot 10^{-3}\text{m}^2$, d.v.s. den utstrålade effekten per kvadratmeter, vilket också kallas emittansen blir då $M = 35/ 2{,}0 \cdot 10^{-3} = 17{,}5\text{kW/m}^2$. För emittansen gäller att den är beroende av temperaturen enligt följande:

$$M = \sigma \cdot T^4 \text{ där T = yttemperaturen i Kelvin, } \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8} \text{ [Wm}^{-2}\text{K}^{-4}]$$

För temperaturen får man då:

$$T = \sqrt[4]{(M/\sigma)} = \sqrt[4]{(1{,}75 \cdot 10^4/5{,}67 \cdot 10^{-8})} = 745\text{K} = 472°\text{C}$$

Svar: Temperaturen är c:a 470°C (745K)

6. Nyligen har några biologiforskare upptäckt att det finns ett släkte av svampar som kan utnyttja energin från gamma-strålning precis som gröna växter utnyttjar energin från vanligt solljus för sin tillväxt och överlevnad. En naturlig källa till gamma-strålning på jorden är när nukliden kalium-40, ^{40}K, omvandlas via positivt beta-sönderfall enligt nedanstående förlopp, där sista steget är att atomkärnan deexciteras genom att sända ut gamma-strålning:

$$^{40}K \rightarrow {}^{A}X^{*} \rightarrow {}^{A}X + \text{gamma-strålning}$$

Massan för ^{A}X är 39,96238312u och för $^{A}X^{*}$ är 39,96395024u, medan den för ^{40}K är 39,96399848u.

a) *Vad är identiteten för nukliden ^{A}X (d.v.s. vilket är grundämnet X och vilket värde har A) och hur mycket energi frigörs som gamma-strålning när en $^{A}X^{*}$ atom deexciteras?*

(3p)

Ungefär 10% av all naturligt förekommande kalium-40 omvandlas via positivt beta-sönderfall, där halveringstiden är $1{,}25 \cdot 10^{9}$ år. En svamp behöver i genomsnitt 5,0J energi per dygn för att överleva.

b) *Om man antar att svampen klarar av att ta upp all gamma-strålning som en viss mängd kalium-40 avger, hur mycket kalium-40 behöver det finnas i svampens omedelbara närhet för att den ska kunna överleva på bara gamma-strålningen från kalium-40? Svara i massa med lämplig enhet.*

(1p)

Lösningsförslag

(a) Vid positivt beta-sönderfall kommer i kärnan en proton att omvandlas till en neutron och en positron, d.v.s. det kommer att bli en proton mindre och en neutron mer i kärnan jämfört med innan. Detta innebär för kaliumkärnan, som har atomnummer 19 och därmed 19 protoner och 21 neutroner i kärnan, att den efter sönderfallet kommer att ha 18 protoner och 22 neutroner i kärnan. Det gör att kalium övergår i grundämnet argon, som har 18 protoner i kärnan. Totala antalet kärnpartiklar, d.v.s. masstalet A, är däremot konstant, alltså A=40.

När det gäller hur mycket energi som frigörs när den exciterade argon-kärnan $^{40}Ar^{*}$ deexciteras fås detta enligt sambandet $E = m \cdot c^2$, där massan m utgör den minskning av massa som fås då $^{40}Ar^{*}$ deexciteras till ^{40}Ar genom att skicka ut gamma-strålning, d.v.s. skillnaden i massa mellan dessa båda kärnor. Vi får:

$$m = m(^{40}Ar^{*}) – m(^{40}Ar) = 39{,}96395024 - 39{,}96238312 =$$
$$1{,}567 \cdot 10^{-3}\ u = 1{,}567 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}66054 \cdot 10^{-27} = 2{,}602 \cdot 10^{-30} kg$$

För energin E som frigörs får man då:

$$E = m \cdot c^2 = 2{,}602 \cdot 10^{-30} \cdot (2{,}998 \cdot 10^{8})^2 = 2{,}339 \cdot 10^{-13}\ J =$$
$$2{,}339 \cdot 10^{-13}/1{,}602 \cdot 10^{-19} = 1{,}46 \cdot 10^{6}\ eV.$$

Svar: Grundämnet X blir argon Ar och masstalet A=40. Mängden energi som frigörs vid deexcitationen är 1,46MeV (eller 2,339·10^{-13} J)

(b) För att veta hur mycket K-40 som behövs för att man ska få en viss energimängd under ett dygn är det enklast att räkna på aktiviteten (kalium-40 har så lång halveringstid att aktiviteten inte kommer att ändra sig under ett dygn utan håller sig konstant). I (a) räknades ut hur mycket energi som fås i form av gammastrålning vid ett sönderfall, nämligen $2{,}339 \cdot 10^{-13}$ J. För att komma upp i 5,0J krävs då på ett dygn $5{,}0/2{,}339 \cdot 10^{-13} = 2{,}138 \cdot 10^{13}$ sönderfall. Om vi vill göra det enkelt för oss och räkna i enheten år hela tiden, skulle detta då motsvara $2{,}138 \cdot 10^{13} \cdot 365 = 7{,}802 \cdot 10^{15}$ sönderfall/år.

Aktiviteten ges av sambandet $R = \lambda \cdot N$, där λ är sönderfallskonstanten och N antalet kalium-40 atomer i det ögonblicket. Sönderfalls-konstanten fås från sambandet mellan denna och halveringstiden $T_{½}$ som $\lambda = \ln2/T_{½} = \ln2/1{,}25 \cdot 10^{9} = 5{,}545 \cdot 10^{-10}$ (relaterat till tidsenheten år). Om vi vill veta hur mycket kalium-40 som behövs för svampens överlevnad kan vi räkna ut antalet K-40-atomer som behövs för att få aktiviteten R = $7{,}802\cdot10^{15}$ sönderfall/år, d.v.s. $N = R/\lambda = 7{,}802\cdot10^{15}/5{,}545\cdot10^{-10} = 1{,}407\cdot10^{25}$ atomer. Nu är det dock bara 10% av kaliumatomerna som sönderfaller via positivt beta-sönderfall och ger upphov till gammastrålning. Så egentligen behövs det tio gånger så många, d.v.s. $1{,}407\cdot10^{26}$ st. Massan för dessa kan vi få genom att multiplicera med atommassan för K-40, d.v.s. c:a $39{,}9\cdot1{,}66054\cdot10^{-27}$kg vilket ger:

$$m = 1{,}407\cdot10^{26}\cdot39{,}9\cdot1{,}66054\cdot10^{-27} = 9{,}3\text{kg}$$

Svar: Det behövs c:a 9,3kg K-40.