den 4 maj 2012

Föreläsning 13

Kärnfysik 2

Sönderfallslagen

Låt oss börja med ett tankeexperiment (som man med visst tålamod också kan utföra rent praktiskt). Säg att man kastar en tärning en gång. Innan man kastat tärningen kan man inte förutse vilket värde 1-6 som kommer att bli resultatet av kastet, ”slumpen” avgör. Om man kastar tärningen några få gånger till kanske man får resultaten som visade nedan;

3, 2, 4, 2, 6, 4, 1, 1, 3, 4, 2, 2

D.v.s. fast tärningen kastats 12 gånger har man inte fått den där 5:an man behövde för att kunna gå ut i Fia med knuff (om någon spelar det spelet längre vill säga…), men irriterande nog 2 hela 4 gånger. Och det går inte att säga när man kommer att få den där 5:an man behöver, det kan bli i nästa kast, eller om ytterligare 7 kast. Om man fortsätter att kasta en väldigt massa gånger så kommer (om tärningen är välgjord och helt symmetrisk i alla avsikter) man dock att se att man får resultatet 5 ungefär lika ofta som något av de andra resultaten 1, 2, 3, 4 och 6, alltså i en sjättedel av kasten, <u>sannolikheten</u> är ju lika stor att få 5 som att få 1 eller 2 eller 3 eller 4 eller 6. Om ni vill övertyga er om detta är det bara att utföra experimentet…

Istället för att ta en tärning och kasta den väldigt många gånger skulle man också kunna ta väldigt många tärningar, säg N stycken, och kasta dem samtidigt med samma resultat. Det är omöjligt att på förhand säga vilket värde som dyker upp för en viss tärning men ungefär en sjättedel, d.v.s. N/6, av dem kommer att visa 5, en sjättedel 4 etc. Säg nu vidare att vi tar alla dessa väldigt många tärningar och upprepar kastet några gånger. Varje kast tar en viss tidsperiod att utföra, säg Δt. För varje enskild tärning går det inte att på förhand säga när man får värdet 5 för första gången, det kan vara redan första gången, alltså efter tiden Δt, eller efter fjärde gången, alltså efter tiden $4 \cdot \Delta t$, eller efter 13:e kastet, alltså tiden $13 \cdot \Delta t$, eller ännu senare. Men i första kastet kommer c:a en sjättedel N/6 av tärningarna att visa 5.

Säg att vi lägger åt sidan alla de tärningar från första kastet som visat 5 så att dessa inte deltar i kast nummer två. D.v.s. efter tiden Δt har vi plockat bort N/6 tärningar så att det i nästa kast bara deltar 5N/6 tärningar. Det är fortfarande ett stort antal tärningar och i nästa kast kan man förvänta sig att också nu ungefär en sjättedel av alla tärningar som kastas kommer att visa 5, d.v.s. $1/6 \cdot 5N/6 = 5N/36 \sim N/7$ (en sjundedel av det ursprungliga antalet tärningar). Vi tar då bort även dessa tärningar så att de inte får vara med i nästa kast, d.v.s.

efter 2·Δt finns det bara N – N/6 – 5N/36 = 36N/36 – 6N/36 – 5N/36 = 25N/36 (~0,6944·N) tärningar kvar som deltar i kastet. Om vi anser att detta fortfarande är väldigt många tärningar kan man även i nästa kast förvänta sig att ungefär en sjättedel ger resultatet 5, vilka vi inte låter delta i nästa kast. Då finns det bara N – N/6 – 5N/36 – 1/6 · 25N/36 kvar som får delta efter tiden 3·Δt (~0,5787·N tärningar). Man kan sedan fortsätta på samma sätt och se hur många tärningar det finns kvar som får delta i nästa kast en viss tid senare och får resultatet som visas i figur 13.1. nedan. Behåll resonemanget och figuren i bakhuvudet.

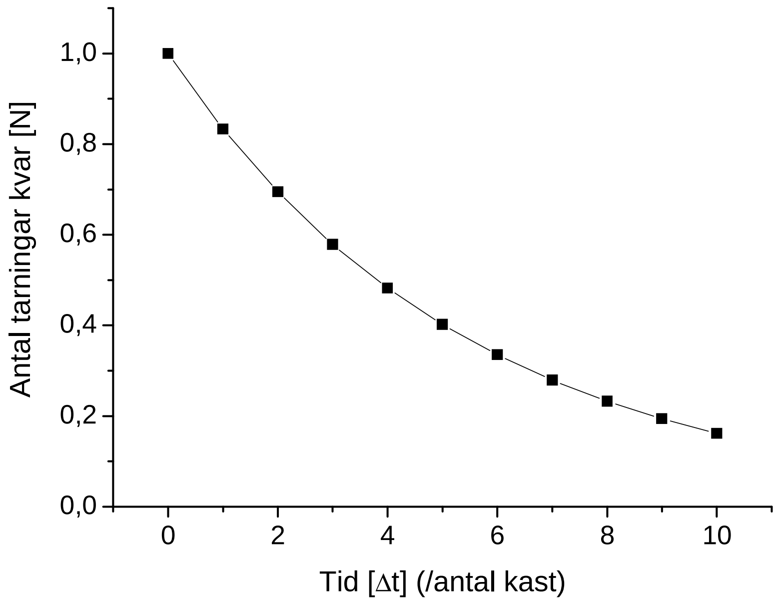

Fig. 13.1

I föregående avsnitt diskuterades kärnsönderfall/ kärnomvandlingar. I motsats till reaktioner atomer eller molekyler emellan (kemiska reaktioner, som t.ex. när gasen metan – CH_4 – förbränns med luftens syre och bildar koldioxid, CO_2, och vatten, H_2O, då en blandning av metan och luft hettas upp till c:a 300°C eller när ammoniak, NH_3, börjar reagera med kvävedioxid, NO_2, och bilda kväve, N_2, och vatten från c:a 800°C) påverkas inte dessa omvandlingar i kärnan av sådant som temperatur (inom rimliga gränser, d.v.s. temperaturer som normalt förekommer på jorden) eller belysning med synligt eller UV-ljus.

Kärnomvandlingarna sker istället helt slumpmässigt och det går inte att förutsäga när just en viss kärna kommer att genomgå omvandlingen. I varje ögonblick skulle man kunna säga att det finns ett antal möjliga tillstånd kärnan kan hamna i, ungefär som det vid varje kast med tärningen finns 6 tillstånd tärningen kan hamna i. Hos tärningen kan man också säga att det kan bli 6 olika utfall vid ett tärningskast (1:a, 2:a, 3:a … 6:a), men om man tänker på Fia-med-knuff-fallet ovan så kan man också tänka sig att man bara är intresserad av två utfall 5:a eller inte 5:a, d.v.s. 5 motsvarar ett utfall och alla de andra (1, 2, 3, 4 och 6) motsvarar ett annat utfall. På samma sätt kan man tänka sig att det bara är två utfall (två resultat) man är intresserad av när det gäller kärnans olika tillstånd i ett visst ögonblick; omvandling eller ingen omvandling. För en enskild kärna kan man alltså inte förutsäga i vilket ögonblick den hamnar i ett tillstånd där utfallet blir att den omvandlas (precis som man inte kan förutsäga i vilket kast i ordningen en enskild tärning hamnar i det tillstånd – 5 – som gör att man vinner i Fia med knuff).

Men bara en liten mängd av ett visst instabilt ämne, ta som exempel 1g av kalium-isotopen kalium-40, innehåller oerhört många atomer, i fallet ^{40}K c:a $1{,}5\cdot10^{22}$ st, och i varje ögonblick kommer en viss andel av dessa att befinna sig i ett sådant tillstånd där utfallet blir att de omvandlas (precis som att tillståndet 5, motsvarande utfallet att man vinner, efter ett kast med väldigt många tärningar samtidigt fås för en sjättedel av tärningarna). D.v.s. precis som för tärningarna, där alla som visade 5 efter första kastet, och som tog tiden Δt att genomföra, plockades bort från nästa kastomgång, kommer en viss andel av kärnorna som fanns från början att ha omvandlats efter en viss liten tid Δt. Dessa kan ju inte omvandlas igen på samma sätt, varför det precis som för tärningarna nu bara finns det ursprungliga antalet kärnor minus den andel kärnor som omvandlats kvar. Under nästa ögonblick kommer en viss andel av de kärnor som finns kvar att hamna i ett sådant tillstånd att utfallet blir att de omvandlas, d.v.s. precis som för tärningarna där en sjättedel av de tärningar som fanns kvar visar 5 i nästa kast. Och så fortsätter det när tiden rullar på.

Intuitivt får vi alltså att det antal som omvandlas under en viss tid Δt bero på hur många det finns av den ursprungliga kärnan – N – när man börjar räkna den där korta tiden Δt, eftersom det är en viss andel av de ursprungliga kärnorna som omvandlas, d.v.s. om vi betecknar antalet som omvandlas under tiden Δt med ΔN så kan vi skriva:

$$\Delta N = \lambda \cdot N \quad 0 < \lambda < 1$$

Där λ är en proportionalitetskonstant (i fallet med tärningarna skulle λ vara lika med 1/6, en sjättedel).

Vidare måste det ju vara så att om man förlänger tiden lite under vilken man ger kärnorna chansen att hamna i ett tillstånd där de omvandlas (två ögonblick istället för ett…) så borde fler kärnor omvandlas. I en inte helt jämförbar analogi skulle man kunna säga att om man låter tiden Δt i experimentet med tärningskasten motsvara två tärningskast istället för ett så ser vi att fler tärningar har lagts åt sidan (färre tärningar deltar i tredje än i andra kastet). Egentligen haltar jämförelsen lite eftersom antalet tärningar som finns kvar efter andra kastet beror på hur många som fanns kvar efter första kastet snarare än hur lång tid det gått, men vi ska se att det ordnar sig på slutet ändå. Vi kan i alla fall preliminärt skriva att ΔN beror både på hur många det finns från början och på tiden Δt. Dessutom brukar man med ΔN ange hur antalet kärnor förändras. Eftersom antalet minskar bör då ΔN vara ett negativt tal, men både N och Δt är ju positiva storheter, d.v.s. vi bör skriva sambandet som:

$$\Delta N = -\lambda \cdot N \cdot \Delta t$$

Åter till problemet med vad som händer om man som i exemplet med tärningarna ”dubblar tiden”. Om man jämför med Fig. 13.1 ser man att det inte blir dubbelt så många tärningar som tas bort om man tittar efter andra kastet jämfört med efter första, hur många som plockas bort i andra kastet beror ju på hur många som fanns kvar efter första, d.v.s. om man dubblar tiden blir inte förändringen i antalet kärnor dubbelt så stor, sambandet ovan blir inte riktigt rätt. Detta löser vi dock på fysikerns pragmatiska sätt – vi gör tiden Δt oändligt kort. Två gånger Δt är fortfarande oändligt kort och antalet kärnor har inte hunnit ändras i någon praktisk betydelse, d.v.s. om en viss andel försvinner under Δt så motsvarar det ett så litet antal att man kan säga att det i praktiken finns lika många kvar som från början och att den andel som försvinner under nästa oändligt korta tid Δt i praktiken är lika stor som under den första, d.v.s. vi får en dubbling av det antal kärnor som försvinner om den oändligt korta tiden dubblas. Skrivmässigt får vi när vi gör tiden oändligt kort:

$$dN = -\lambda \cdot N \cdot dt$$

Genom differentiering får vi

$$dN/dt = -\lambda \cdot N$$

Om vi nu vill veta hur antalet kärnor som finns kvar varierar med tiden så ser vi att dN/dt ju anger derivatan för antalet kärnor med tiden. D.v.s. om vi vill veta hur mycket kärnor det finns efter tiden t kan vi få fram det genom att integrera sambandet ovan, antingen genom ren inspektion eller genom användande av integrerande faktor. I båda fallen får vi att:

$$N(t) = C \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad \text{där C är en konstant}$$

Vi kan övertyga oss om resultatet genom att derivera sambandet ovan och jämföra med sambandet för derivatan:

$$dN(t)/dt = -\lambda \cdot C \cdot e^{-\lambda \cdot t} = -\lambda \cdot N(t)$$

d.v.s. samma som vi kommit fram till tidigare. Vad gäller då för konstanten C, kan den vara helt godtycklig? Vid tiden 0, alldeles precis innan vi börjar räkna tiden, kommer motsvara vi att ha det ursprungliga antalet kärnor. Säg att det finns antalet N_0 kärnor från början. Då måste det vara så att $N(t=0) = N_0$:

$$N(0) = C \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = C \cdot 1 = C \;\; \Rightarrow C = N_0$$

Vi ser att det fulla sambandet för hur antalet kärnor N kommer att variera med tiden ges av:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \text{ , } N_0 \text{ är antalet kärnor från början}$$

Konstanten λ kallas för **sönderfallskonstanten** och anger hur stor andel av kärnorna som omvandlas under tiden dt, där dt kan motsvaras av lite olika tidsenheter beroende på hur stor eller liten andel kärnor som omvandlas under en viss tidsenhet, men räknat i SI-enheter skulle λ motsvara andelen kärnor som omvandlas per sekund. Sönderfallskonstanten är väldigt olika för olika atomkärnor. En del kärnor omvandlas så långsamt att bara en oerhört liten bråkdel av kärnorna omvandlas över en tidsrymd på ett år medan andra kärnor av andra slag omvandlas så snabbt att det mesta omvandlats efter någon sekund.

Vi ser att antalet kärnor kommer att minska med tiden på samma sätt som antalet tärningar minskar för varje kastomgång. I Fig. 13.2 nedan ges ett principdiagram för hur antalet varierar med tiden beroende på värdet på sönderfallskonstanten.

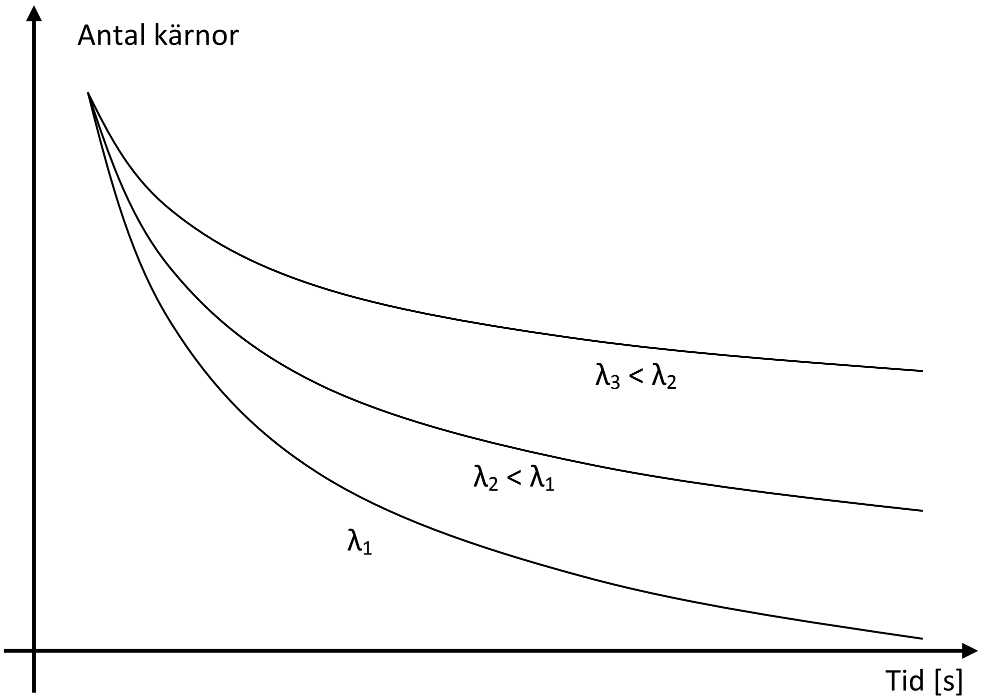

Fig. 13.2

Ett annat sätt att ange hur snabbt en viss typ av kärnor omvandlas är att se på hur lång tid det tar innan hälften av de ursprungliga kärnorna omvandlats. Denna tid kallas **halveringstiden** och betecknas $\mathbf{T_{1/2}}$ och kan vi plocka fram ett samband för enligt:

$$0{,}5 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot T1/2}$$

$$0{,}5 = e^{-\lambda \cdot T1/2}$$

$$\ln(0{,}5) = \ln(e^{-\lambda \cdot T1/2})$$

$$\ln(0{,}5) = -\lambda \cdot T_{1/2}$$

$$\ln(0{,}5) = \ln(1/2) = \ln(2^{-1}) = -\ln 2 = -\lambda \cdot T_{1/2}$$

$$\ln 2 = \lambda \cdot T_{1/2}$$

den 4 maj 2012

$$T_{1/2} = \ln 2/\lambda$$

Vi ser alltså att halveringstiden ges av ln2 delat med sönderfallskonstanten. Halveringstiderna kan variera för olika atomkärnor från någon bråkdel av en sekund upp till miljarder år.

Vi har ju sett att sönderfall/ omvandlingar är kopplat till bildande av radioaktiv strålning av olika slag. Hur mycket strålning som bildas och som man kan utsättas för under en viss tid beror ju på hur många omvandlingar/ sönderfall som sker på en viss tid. Vi har sett att det antal som omvandlas per tidsenhet Δt ges av sambandet:

$$\Delta N = \lambda \cdot N \cdot \Delta t \quad \Rightarrow$$

$$\Delta N/\Delta t = \lambda \cdot N \ (=A)$$

Antalet omvandlingar på en sekund brukar också kallas för **aktiviteten** hos en viss mängd av ett radioaktivt ämne och betecknas med **A**. Genom att kombinera sambandet ovan med det tidigare för hur antalet kärnor varierar med tiden kan vi se att aktiviteten A varierar med tiden enligt:

$$A(t) = \lambda \cdot N(t) = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

där A_0 anger den ursprungliga aktiviteten. Vi ser att aktiviteten avtar på liknande sätt som antalet ursprungliga kärnor med tiden, vilket väl är naturligt eftersom aktiviteten ju beror på hur många kärnor det finns kvar som kan sönderfalla.