KRAMERS-KRONIGS DISPERSIONSRELATIONER

I detta kapitel diskuterar vi vad som händer om en pol finns på integrations-konturen och vi härleder Kramers-Kronigs dispersionsrelationer.

Kramers-Kronigs dispersionsrelationer är mycket användbara hjälpmedel inom fysiken och vi ska nu ta fram dessa. De bygger på residuekalkylen som vi behandlade i förra avsnittet.

Vi måste nu först studera några fler fall eller situationer. Antag först att vi vill integrera utmed hela reella axeln och vår integrand har *alla sina poler i nedre halvplanet*. Då är det lämpligt att välja vår kontur enligt alternativ (a) i förra avsnittet. Integralen blir då noll under förutsättning att integranden på halvcirkelbågen går mot noll tillräckligt snabbt, då radien av cirkeln går mot oändligheten, för att integrationen utmed cirkelbågen inte ska ge något bidrag.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x-1+ia)(x+1+ia)} = 0 \quad ; \quad a>0, \text{ reellt}$$

Om i stället *alla poler ligger i övre halvplanet* väljer vi kontur enligt (b).

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x-1+ia)(x+1+ia)} = 0 \quad ; \quad a<0, \text{ reellt}$$

Att lägga märke till är att om integranden har alla sina poler i ett av det övre eller nedre halvplanen så är den inte reell.

Vad händer nu om en pol ligger på reella axeln?

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x-1)} = ?$$

Den här integralen existerar inte i egentlig mening. Man måste ge ett recept på hur man ska integrera annars kan man få vilket värde som helst. Vi har nämligen att

$$\int_{-\infty}^{1} dx \frac{1}{(x-1)} = -\infty \;;\; \int_{1}^{\infty} dx \frac{1}{(x-1)} = \infty$$

och summan av plus och minus oändligheten kan bli vad som helst. Problemet är analogt med det för oändliga serier som inte är absolutkonvergenta. Beroende på hur man grupperar ihop termerna kan man få vilket värde som helst. I fallet med integraler är det vanligast att man använder sig av principalvärdet av integralen.

$$P\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x-1)} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{1-\varepsilon} dx \frac{1}{(x-1)} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} dx \frac{1}{(x-1)}\right] = 0$$

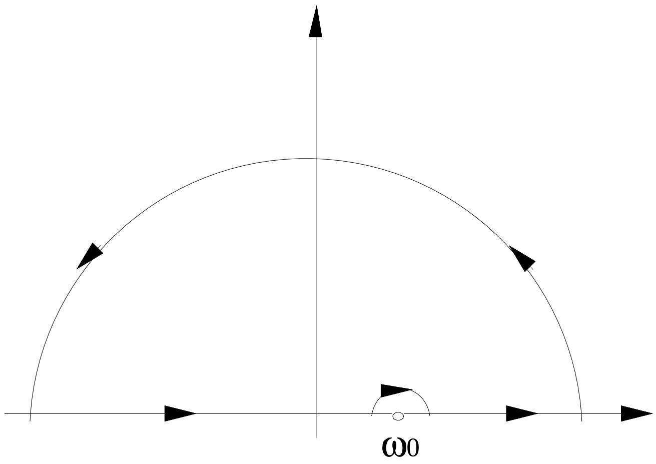
I detta specifika fall blev integralen 0. (Ibland flyttar man in Pet innanför integraltecknet och placerar det framför integranden).

I en viktig del av den experimentella fysiken utgörs experimenten av att man stör sitt system på något sätt och studerar hur systemet svarar på den yttre störningen. Störningen kan vara i form av ett elektriskt fält, ett magnetiskt fält, en elektromagnetisk våg, en temperaturpuls, ... Svaret eller responsen på störningen uttrycks i form av s.k. responsfunktioner eller korrelationsfunktioner. De som är av störst intresse inom elektromagnetismen är konduktiviteten, de elektriska och magnetiska polariserbarheterna, brytningsindexet och dielektricitetsfunktionen. Om man är intresserad av tidsutvecklingen av störningen är responsfunktionerna frekvensberoende s.k. tidskorrelationsfunktioner. Frekvensen (egentligen vinkelfrekvensen) är här den komplexa variabeln. Alla dessa responsfunktioner har sina poler i nedre halvplanet (de ligger faktiskt på ett infinitesimalt avstånd från axeln); det hänger samman med att responsen alltid kommer efter störningen (kausalitet). Av detta följer således enligt ovan att funktionerna är komplexvärda.

Vi ska använda faktumet att korrelationsfunktionerna är analytiska i övre halvplanet vid härledningen av Kramers-Kronigs dispersionsrelationer. Låt f vara en korrelationsfunktion och ω_0 en punkt på den reella axeln. Cauchys integralformel ger då

$$\frac{1}{2\pi i}\oint dz \frac{f(z)}{(z-\omega_0)} = 0$$

om vi väljer följande kontur:



Den stora halvcirkelns radie låter vi gå mot oändligheten och den lillas mot noll. Om nu korrelationsfunktionen har valts med eftertanke så bidrar inte integralen utmed den stora halvcirkeln. Av exemplen vi har räknat upp ovan så gäller detta för konduktiviteten och för de elektriska och magnetiska polariserbarheterna. För brytningsindexet och dielektricitetsfunktionen måste vi subtrahera med *1* för att få användbara funktioner. De resulterande funktionerna går då tillräckligt snabbt mot noll på cirkeln då dess radie går mot oändligheten. Integralen utmed den lilla halvcirkeln blir $-\pi i f(\omega_0)$. Detta följer ur (95). När radien går mot noll kan funktionen f ersättas med dess värde i polen och kvar blir en integral över $1/z$ utmed en halvcirkel i negativ riktning.

Cauchys integralformel ger nu

$$0 = \frac{1}{2\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{(\omega-\omega_0)} - \frac{1}{2} f(\omega_0) \tag{97}$$

och

$$f(\omega_0) = \frac{1}{\pi i} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{f(\omega)}{(\omega-\omega_0)} \tag{98}$$

Om vi separerar ut real- och imaginärdelen av den komplexa funktionen fås:

$$\operatorname{Re} f(\omega_0) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\operatorname{Im} f(\omega)}{(\omega - \omega_0)}$$
$$\operatorname{Im} f(\omega_0) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\operatorname{Re} f(\omega)}{(\omega - \omega_0)} \tag{99}$$

Vi kan nu slutligen använda oss av ytterligare en egenskap hos dessa korrelationfunktioner: Realdelen är en jämn och imaginärdelen en udda funktion av frekvensen. Detta leder till:

Kramers-Kronigs dispersionsrelationer:

$$\operatorname{Re} f(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_{0}^{\infty} d\omega' \operatorname{Im} f(\omega') \frac{\omega'}{\omega'^2 - \omega^2}$$
$$\operatorname{Im} f(\omega) = -\frac{2}{\pi} P \int_{0}^{\infty} d\omega' \operatorname{Re} f(\omega') \frac{\omega}{\omega'^2 - \omega^2} \tag{100}$$

Dessa relationer visar att real- och imaginärdelarna av en korrelationsfunktion är intimt förknippade med varandra. Ofta kan man i ett experiment bara mäta den ena av funktionerna. Relationerna ovan innebär att man från dessa resultat kan räkna ut den andra.

Inom den teoretiska fysiken räknar man ofta utmed imaginäraxeln. Funktionerna beter sig mycket bättre där.

HEMUPPGIFT: Bestäm motsvarande relationer för en punkt på imaginäraxeln, i övre halvplanet, dvs. $\operatorname{Re} f(i\omega)$ och $\operatorname{Im} f(i\omega)$. Resultatet ska vara i form av integraler utmed positiva real-axeln. Det är ju där som man kan mäta storheterna. Det är där de har direkt fysikalisk tolkning.

Svar till problemen:

A

1. $-i$
2. $1/2+i1/2$
3. $2/5-i1/5$
4. -1
5. $i2$
6. $3+i4$
7. $-i$
8. $-2+i2$
9. $2+i11$
10. $1/\sqrt{2}+i1/\sqrt{2}$
11. $1.099+i0.455$
12. $1.455+i0.344$
13. $-1+i$
14. $-1+i2$
15. $1+i2$
16. $1+i3$
17. $3+i$
18. 5
19. $1/2+i1/2$
20. $1/5+i2/5$
21. $-1/5+i2/5$
22. $3/5+i1/5$
23. $1/5+i3/5$
24. $3/5+i4/5$
25. $(2,1)$
26. $-\frac{2}{5}$
27. $i\frac{1}{2}$
28. -4

B

1. 1
2. 1
7. -1
8. -1
9. -1
10. -1
11. $\left(z^2+2z+2\right)\left(z^2-2z+2\right)$

C

1. $z=\mathrm{Log}(2)\pm(2n+1)\pi i \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$
2. $z=\frac{1}{2}\pm n\pi i \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$
10. i

D

7. $\exp(\pi\pm 4n\pi) \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$
8. $\left(\pm\frac{1}{3}\pm 2n\right)\pi i \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$
9. $\left(\frac{1}{2}\pm 2n\right)\pi i \quad ; \quad n=0,1,2,\ldots$
10. $\mathrm{Log}\left(2+\sqrt{3}\right)+(1\pm 2n)\pi i$
11. $(1\pm 2n)\pi i$
12. $\mathrm{Log}\left(2+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\pm 2n\right)\pi i$

E

1. π
2. $-i\pi$
3. $i\pi$
4. 0
5. 0
6. 0
7. $\frac{\pi}{2}$
8. $\frac{\pi}{6}$
9. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$
10. $\frac{\pi}{6}$
11. π
12. $-\frac{\pi}{5}$
13. $\frac{\pi}{4}$
14. $\frac{\pi}{60}$