RESIDUER OCH POLER

I detta kapitel studerar vi de punkter där en funktion inte är analytisk. Vi inför begreppet pol och lär oss räkna ut residuen i en pol. Vi använder residuekalkyl för att beräkna integraler. Vi går igenom residueteoremet och Cauchys integralformel.

Om en funktion är analytisk i någon punkt i varje omgivning till en punkt z_0 utom i z_0 själv så kallas z_0 en *singulär punkt*, eller singularitet, till funktionen.

Om det finns någon omgivning till en singulär punkt, z_0, till en funktion f där f är analytisk överallt utom i punkten z_0 själv så kallas z_0 an *isolerad singulär punkt* till f.

Exempel:

1) Funktionen

$$f(z) = \frac{z-2}{z^5(z-1)^2\left(z^2+1\right)^2} \tag{87}$$

har fyra isolerade singulära punkter: $z = 0$, $z = 1$ och $z = \pm i$.

2) Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{\sin(\pi/z)} \tag{88}$$

har oändligt många isolerade singulära punkter: $z = \pm 1$, $z = \pm 1/2$, $z = \pm 1/3$ osv. Punkten $z = 0$ är också en singulär punkt men den är inte isolerad p.g.a. att det i varje omgivning till $z = 0$ finns andra singulära punkter.

3) Funktionen

$$f(z) = \mathrm{Log}(z) \tag{89}$$

har singulära punkter utmed negativa realaxeln och i origo. Varje punkt utmed negativa realaxeln är en singulär punkt, men ingen av dessa är isolerad. Detsamma gäller origo.

När z_0 är en isolerad singulär punkt till f så existerar det ett positivt tal

r_1 sådant att funktionen är analytisk i varje punkt z för vilken $0<|z-z_0|<r_1$.

I detta område kan funktionen representeras med en s.k. *Laurentserie*:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots \quad (90)$$

Koefficienten b_1 kallas *residuen* för funktionen f i den isolerade singulära punkten z_0.

Laurentserien består av två delar, en med positiva exponenter och en med negativa. Delen med negativa exponenter kallas principaldelen.

Antag att principaldelen består av endast ett ändligt antal termer. Om den högsta negativa potensen är m kallas den singulära punkten en *pol* till funktionen av ordning m. Om m = 1 kallas polen en *enkelpol*. Om m = 2 kallas polen också dubbelpol, för m = 3 för trippelpol o.s.v.

Residueteoremet

Låt C vara en sluten kontur inom vilken och på vilken funktionen f är analytisk utom i ett ändligt antal singulära punkter z_0, z_1, ..., z_n, i det inre av C. Om K_1, K_2, ..., K_n är residuerna till f i dessa punkter så gäller att

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i\left(K_1 + K_2 + \cdots K_n\right) \quad (91)$$

där integralen tas i positiv riktning, d.v.s. moturs runt C.

Det här teoremet är mycket användbart i flera olika sammanhang.

Hur finner vi då residuerna?

Metod 1: Gör en Laurentserieutveckling runt polen och identifiera koefficienten b_1 framför $1/(z\text{-}z_0)$.

Metod 2: Om polen är av ordning m så är

$$b_1 = \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \frac{(z-z_0)^m f(z)}{(m-1)!}\bigg|_{z=z_0} \tag{92}$$

och speciellt är för en enkelpol: $b_1 = (z-z_0) f(z)\big|_{z=z_0}$ (93)

Metod 3: Det finns ett alternativt sätt om funktionen är på bråkform

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

och p och q är båda analytiska i z_0 och $p(z_0) \neq 0$. Om p och q uppfyller villkoren $q(z_0) = 0$, $q'(z_0) \neq 0$ och $p(z_0) \neq 0$ så har funktionen en enkelpol i z_0 och residuen för f är

$$b_1 = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} \tag{94}$$

Hur kommer det sig då att endast b_1-koefficienten i Laurentutvecklingen bidrar? Vi försöker få lite erfarenhet genom att studera det enklaste fallet där vi har en pol av ordning n i origo och integrerar utmed en cirkel med centrum i origo.

$$\begin{aligned} \oint dz \frac{1}{z^n} &= /\, låt \;\; z = re^{i\theta}, \;\; dz = ire^{i\theta} d\theta \,/ = ir^{1-n} \int_0^{2\pi} d\theta e^{i\theta(1-n)} \\ &= \begin{cases} i2\pi, & n = 1 \\ \dfrac{ir^{1-n}}{i(1-n)}\left(e^{i2\pi(1-n)} - 1\right) = 0, & n \neq 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{95}$$

Exempel:

Vi löser nu en reell integral m.h.a. residuekalkyl bara för att illustrera hur metoden kan användas för att underlätta lösandet eller ge en alternativ lösningsmetod:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)} = ?$$

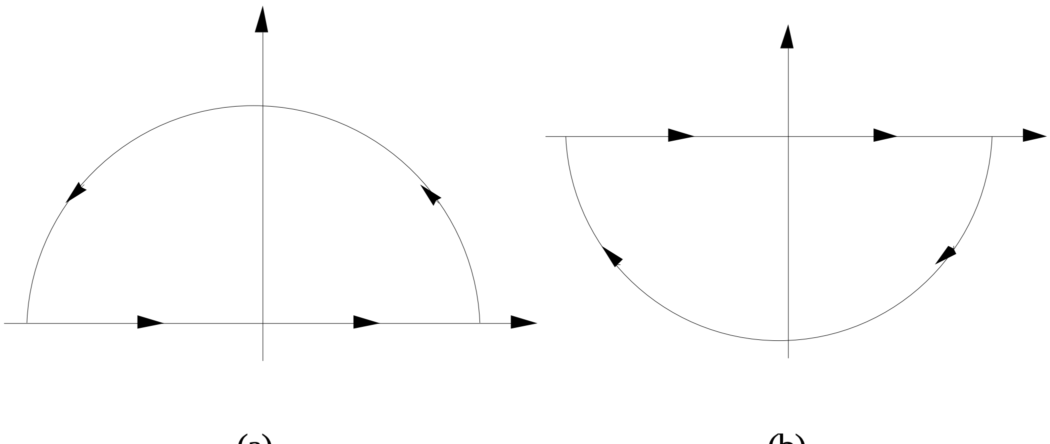
Funktionen

$$f(z) = \frac{1}{\left(z^2+1\right)\left(z^2+4\right)} = \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-2i)(z+2i)}$$

har fyra enkelpoler i punkterna $\pm i,\ \pm 2i$.

Vi studerar följande integral:

$\oint dz f(z)$ utmed en av de följande två konturerna



(a) (b)

där vi låter radien på halvcirkeln gå mot oändligheten. Integrationen utmed halvcirkeln går då i båda alternativen mot noll.

I alternativ (a) blir då den sökta integralen $2\pi i$ gånger summan av residuerna för de två polerna i övre halvplanet. I alternativ (b) bli integralen -

$2\pi i$ gånger summan av residuerna för de två polerna i undre halvplanet.

För att få residuen för en pol gör vi enklast så att vi multiplicerar funktionen med (z-z_0) och ersätter z med z_0 i det resulterande uttrycket.

pol	residue
i	-i/6
-i	i/6
2i	i/12
-2i	-i/12

Resultatet enlig kontur (a) ger $2\pi i(-\mathrm{i}/6+\mathrm{i}/12)=\pi/6$. Resultatet enlig kontur (b) ger $-2\pi i(\mathrm{i}/6-\mathrm{i}/12)=\pi/6$. Resultaten är lika som sig bör.

Cauchys integralformel

Låt funktionen $f(z)$ vara analytisk på och innanför en sluten kontur C i komplexa talplanet. Låt punkten z_0 vara en inre punkt till C.

Då har funktionen

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)}$$

en enkelpol i z_0 med residuen $f(z_0)$ och integralen runt C i positiv riktning blir:

$$\oint dz\frac{f(z)}{(z-z_0)}=2\pi i f(z_0)$$

och

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint dz\frac{f(z)}{(z-z_0)} \tag{96}$$

Problem E

1. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+1}$.
2. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x+i}$.
3. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x-i}$.
4. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x+i)(x+2i)(x+3i)}$.
5. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x+i)^2}$.
6. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(x-i)^2}$.
7. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\left(x^2+1\right)^2}$.
8. Lös integralen $\int_{0}^{\infty} dx \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)}$.
9. Lös integralen $\int_{0}^{\infty} dx \frac{1}{\left(x^4+1\right)}$.
10. Lös integralen $\int_{0}^{\infty} dx \frac{x^2}{\left(x^6+1\right)}$.
11. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{x^2+2x+2}$.
12. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2x+2\right)}$.
13. Lös integralen $\int_{0}^{\infty} dx \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$.
14. Lös integralen $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+4\right)\left(x^2+9\right)}$.