3. Trigonometriska funktioner

Från formlerna

$$e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y), \quad e^{-iy} = \cos(y) - i\sin(y)$$

följer att för varje reellt tal y gäller

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \cos(y), \quad \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \sin(y) \tag{59}$$

Definition:

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \tag{60}$$

Både cos(z) och sin(z) är analytiska i hela komplexa talplanet eftersom de är linjärkombinationer av exponentialfunktioner som är analytiska.

Derivatorna är

$$\frac{d}{dz}\sin(z) = \cos(z), \quad \frac{d}{dz}\cos(z) = -\sin(z) \tag{61}$$

De vanliga trigonometriska sambanden gäller fortfarande:

$$\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1 \tag{62}$$
$$\sin(z_1 + z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \cos(z_1)\sin(z_2) \tag{63}$$
$$\cos(z_1 + z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2) \tag{64}$$
$$\sin(-z) = -\sin(z) \ ; \ \cos(-z) = \cos(z) \tag{65}$$

Definition:

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \ ; \ \cot(z) = \frac{\cos(z)}{\sin(z)} \tag{66}$$

tan(z) är analytisk överallt utom där cos(z) = 0 och cot(z) överallt utom där sin (z) = 0.

4. Hyperboliska funktioner

Definition:

$$\cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \quad \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \tag{67}$$

Dessa funktioner är analytiska överallt och derivatorna är

$$\frac{d}{dz}\cosh(z) = \sinh(z), \quad \frac{d}{dz}\sinh(z) = \cosh(z) \tag{68}$$

Definition:

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)} \; ; \; \coth(z) = \frac{\cosh(z)}{\sinh(z)} \tag{69}$$

Dessa funktioner är analytiska överallt utom där nämnarna är noll.
De vanliga sambanden gäller fortfarande:

$$\cosh^{2}(z) - \sinh^{2}(z) = 1 \tag{70}$$
$$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh(z_1)\cosh(z_2) + \cosh(z_1)\sinh(z_2) \tag{71}$$
$$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh(z_1)\cosh(z_2) + \sinh(z_1)\sinh(z_2) \tag{72}$$
$$\sinh(-z) = -\sinh(z) \; ; \; \cosh(-z) = \cosh(z) \tag{73}$$

5. Inverserna till de trigonometriska och hyperboliska funktionerna.

Inverserna fås genom att lösa ekvationer som

$$z = \sin(\omega) = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i} \tag{74}$$

Lösningen är

$$\omega = \sin^{-1}(z) = -i\log\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{75}$$

Denna funktion har oändligt många värden men om man valjer gren för logaritmen och kvadratroten blir funktionen entydig och analytisk. Man måste alltså ange vilka grenar man har valt för att uttrycket ovan skall vara meningsfullt. Man bör se upp när man använder sig av interna funktioner i kompilatorer då valet av gren kan variera.

$$\sin^{-1}(z) = -i\log\left[iz + \left(1 - z^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{76}$$

$$\cos^{-1}(z) = -i\log\left[z + \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{77}$$

$$\tan^{-1}(z) = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z} \tag{78}$$

$$\sinh^{-1}(z) = \log\left[z + \left(z^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{79}$$

$$\cosh^{-1}(z) = \log\left[z + \left(z^2 - 1\right)^{\frac{1}{2}}\right] \tag{80}$$

$$\tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z} \tag{81}$$

6. Komplexa exponenter

Definition:

$$z^c = \exp[c \log(z)], \; z, \, c \text{ komplexa}, \; z \neq 0 \tag{82}$$

Ur detta följer att

$$z^{-c} = \frac{1}{z^c} \tag{83}$$

Funktionen z^c har multipelvärden men om man väljer gren för logaritmen blir funktionen entydig och analytisk med derivatan

$$\frac{dz^c}{dz} = cz^{c-1} \tag{84}$$

Principalgrenen för exponentfunktionen är densamma som för logaritm-funktionen d.v.s där argumentet för z begränsas till $-\pi<\theta<\pi$.

Exponentialfunktionen med bas c fås ur (82)

$$c^z = \exp[z \log(c)] \tag{85}$$

När man har specificerat $\log(c)$ genom val av gren för logaritmen så är exponentialfunktionen analytisk i hela planet och derivatan är

$$\frac{dc^z}{dz} = c^z \log(c) \tag{86}$$

Problem D

1. Visa (76).
2. Visa (77).
3. Visa (78).
4. Visa (79).
5. Visa (80).
6. Visa (81).
7. Beräkna i^{-2i}.
8. Finn alla rötter till $\cosh(z) = 1/2$.
9. Finn alla rötter till $\sinh(z) = i$.
10. Finn alla rötter till $\cosh(z) = -2$.
11. Finn alla rötter till $\cosh(z) = -1$.
12. Finn alla rötter till $\sinh(z) = 2i$.