KOMPLEXVÄRDA FUNKTIONER AV KOMPLEX VARIABEL

I detta kapitel definierar vi en komplexvärd funktion av en komplex variabel, dess derivata, begreppet analytiska funktioner och de elementära funktionerna med sina inverser.

Låt S vara ett område i det komplexa talplanet. Om det för varje punkt, z, i S finns en tilldelad punkt för variabeln ω, så är ω en funktion av den komplexa variablen z i området S:

$$\omega = f(z) \tag{39}$$

S kallas funktionen ωs definitionsområde och alla komplexa tal som funktionen f antar då alla z i S genomlöpes kallas funktionen ωs värdemängd eller värdeområde.

Låt $z = x + iy$ och $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ där x och y är reella och u och v är reella funktioner av de reella variablerna x och y. Vi ser att vi kan relatera funktionen till funktioner av reella variabler.

Derivatan

Derivatan av en komplexvärd funktion av en komplexa variabel definieras som

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \tag{40}$$

Att funktionen är deriverbar, dvs. att derivatan existerar är ett strängt krav. Det räcker t.ex. inte med att funktionen är kontinuerlig.

Analytiska funktioner

En *funktion* $f(z)$ är *analytisk* i en punkt z_0 om dess derivata existerar inte bara i punkten z_0 utan också i en omgivning till punkten.

Analytiska funktioner är mycket viktiga i samband med konform avbildning och vi kommer att återvända till de egenskaper som följer av att funktionerna är analytiska i kursen *elektromagnetisk fältteori och våg-utbredning*. Vi nämner bara några egenskaper här. Om en funktion är analytisk i ett område av det komplexa talplanet så är dess real och imaginärdel konjugerade harmoniska funktioner i detta område. Vidare gäller att en analytisk funktion av en analytisk funktion är analytisk, dvs. om $g(z)$ är analytisk så är $F(z)=f(g(z))$ analytisk för sådana z-värden att z tillhör det område där g är analytisk och $g(z)$ tillhör det område där $f(z)$ är analytisk.

Ofta är en funktion analytisk i delar av det komplexa talplanet. Inom fysiken så är de analytiska egenskaperna hos de funktioner som beskriver hur ett system svarar på en yttre störning, s.k. responsfunktioner eller tidskorrelationsfunktioner, mycket viktiga. Man kan dra långtgående slutsatser från dessa egenskaper. Vi kommer tillbaka till detta senare. Nu ska vi studera elementära funktioner och deras analytiska egenskaper.

Elementära funktioner

Kraven man kan ställa på en funktion av komplex variabel är dels att den är entydig, d.v.s. att den bara har ett värde för varje punkt i dess definitionsområde, dels att den är identisk med motsvarande funktion av en reell variabel på den del av reella axeln som utgör dess definitionsområde.

1. Exponentialfunktionen

Definition:

$$\exp(z) = e^x(\cos y + i \sin y) \quad ; \quad z = x + iy \tag{41}$$

e är basen för den naturliga logaritmen och y är i radianer. Vi kommer senare att kunna skriva exponentialfunktionen som e^z men kan inte göra det nu då vi ännu endast har definierat reella exponenter.

Exponentialfunktionen är analytisk i hela komplexa talplanet. Vidare gäller att

$$\frac{d}{dz}\exp(z) = \exp(z) \tag{42}$$

och att om ω är analytisk i ett område D så gäller i detta område att

$$\frac{d}{dz}\exp(\omega) = \frac{d\omega}{dz}\exp(\omega) \tag{43}$$

Vi ser att (41) innebär det komplexa talet $\exp(z)$ på polär form där absolutvärdet är e^x och argumentet y. Av detta följer att

$$\exp(z_1)\exp(z_2) = \exp(z_1 + z_2), \tag{44}$$

$$\frac{\exp(z_1)}{\exp(z_2)} = \exp(z_1 - z_2) \tag{45}$$

och för positiva heltal *m* och *n* gäller

$$[\exp(z)]^n = \exp(nz) \tag{46}$$

$$[\exp(z)]^{m/n} = \exp\left[\tfrac{m}{n}(z + 2\pi k i)\right] \;\; ; \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1 \tag{47}$$

Vidare gäller att *exponentialfunktionen är periodisk* med perioden $2\pi i$.

Vi har också att

$$\exp\left(z^*\right) = [\exp(z)]^* \tag{48}$$

Vi kan nu uttrycka ett komplext tal på polär form m.h.a. exponentialfunktionen:

$$z = r[\cos(\theta) + i\sin(\theta)] = r\exp(i\theta) = re^{i\theta} \quad . \tag{49}$$

Exponentialfunktionen kan anta alla värden i det komplexa talplanet utom origo.

Inversen till exponentialfunktionen av en reell variabel är logaritmfunktionen. Låt oss beteckna denna reellvärda funktion av en reell variabel med Log och låta log(z) beteckna motsvarande komplexvärda funktion av en komplex variabel. Denna är nästa funktion vi tänker behandla. Exponentialfunktionen av en reell variabel är en monoton funktion och dess invers är entydig. Problemet med exponentialfunktionen av en komplex variabel är att den är periodisk och alltså antar samma värde flera gånger inom sitt definitionsområde. Dess invers blir därför inte entydig.

2. Logaritmfunktionen

Definition:

$$\log(z) = \log\left(re^{i\theta}\right) = \mathrm{Log}(r) + i\theta \tag{50}$$

Vi kan med hjälp av det speciella argument Θ till z sådant att

$$-\pi < \Theta \le \pi,$$

skriva $z = r\exp[i(\Theta \pm 2n\pi)]$, där n = 0, 1, 2, ... och

$$\log(z) = \log\left(re^{i\theta}\right) = \mathrm{Log}(r) + i(\Theta \pm 2n\pi) \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{51}$$

Funktionen log(z) har multipelvärden med oändligt många värden. Vi kallar värdet av (51) när n = 0 för *principalvärdet* av log(z) och skriver det som Log (z).

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(r) + i\Theta \quad ; \quad r > 0, \ \ -\pi < \Theta \le \pi \tag{52}$$

Denna funktion är inte kontinuerlig för $\Theta = \pi$ men

$$\mathrm{Log}(z) = \mathrm{Log}(r) + i\Theta \quad ; \quad r > 0, \ \ -\pi < \Theta < \pi \tag{53}$$

vars defintionsområde är alla tal i komplexa talplanet utom origo och negativa realaxeln är analytisk i sitt definitionsområde och derivatan är

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}(z) = \frac{1}{z} \quad ; \quad z \ne 0, \ -\pi < \arg(z) < \pi \tag{54}$$

Vi hade kunnat göra funktionen log (z) entydig och kontinuerlig på andra sätt genom att begränsa r och θ

$$\log(z) = \mathrm{Log}(r) + i\theta \quad ; \quad r > 0, \quad \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi \tag{55}$$

log (z) är analytisk i detta område och

$$\frac{d}{dz}\log(z) = \frac{1}{z} \quad ; \quad z \neq 0,\ \theta_0 < \arg(z) < \theta_0 + 2\pi \tag{56}$$

Varje val av θ_0 ger en *gren* av logaritmfunktionen och den där $\theta_0 = -\pi$ kallas *principalgrenen*.

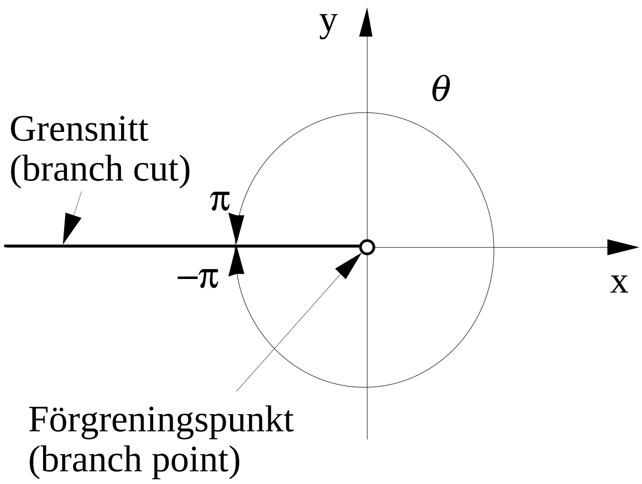
Oavsett vilken gren av logaritmen som har valts så gäller att

$$\exp[\log(z)] = z \tag{57}$$

För rätt val av gren av logaritmen så fås att

$$\log[\exp(z)] = z \tag{58}$$

Alltså är funktionerna exp och log varandras inverser.



Problem C

1. Finn alla värden för z så att $\exp(z) = -2$.
2. Finn alla värden för z så att $\exp(2z - 1) = 1$.
3. När z har den polära representationen $z = r\exp(i\theta)$, visa att $z^* = r\exp(-i\theta)$.
4. När z har den polära representationen $z = r\exp(i\theta)$, visa att $\exp(\log r + i\theta) = z$.
5. Visa att $\exp(0) = 1$.
6. Visa att $\exp(2 \pm 3\pi i) = -e^2$.
7. Visa att $\exp\left(\frac{\pi}{2} i\right) = i$.
8. Visa att $\exp\left(\frac{2+\pi i}{4}\right) = \sqrt{e}\,\frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
9. Visa att $\exp(z + \pi i) = -\exp(z)$.
10. Finn alla rötter till ekvationen $\log(z) = \frac{1}{2}\pi i$.
11. Visa att $\mathrm{Log}(-ei) = 1 - \frac{1}{2}\pi i$.
12. Visa att $\mathrm{Log}(1 - i) = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(2) - \frac{1}{4}\pi i$.
13. Visa att $\log(1) = \pm 2n\pi i \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$
14. Visa att $\log(-1) = \pm(2n + 1)\pi i \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$
15. Visa att $\log(i) = \frac{1}{2}\pi i \pm 2n\pi i \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$
16. Visa att $\log\left(i^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}\pi i \pm n\pi i \quad ; \quad n = 0,1,2,\ldots$