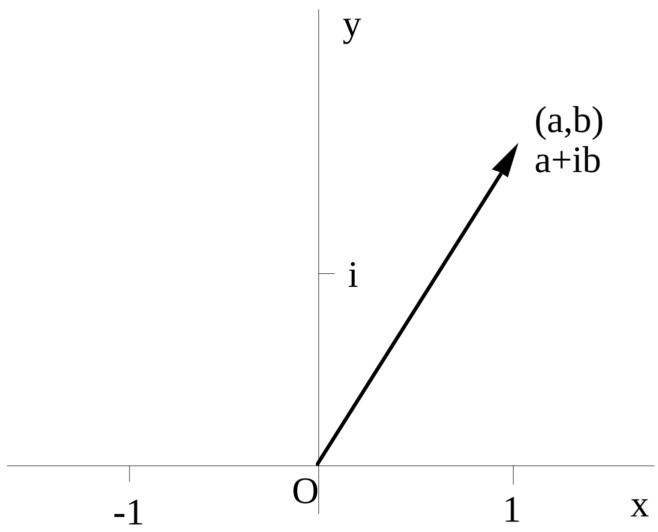
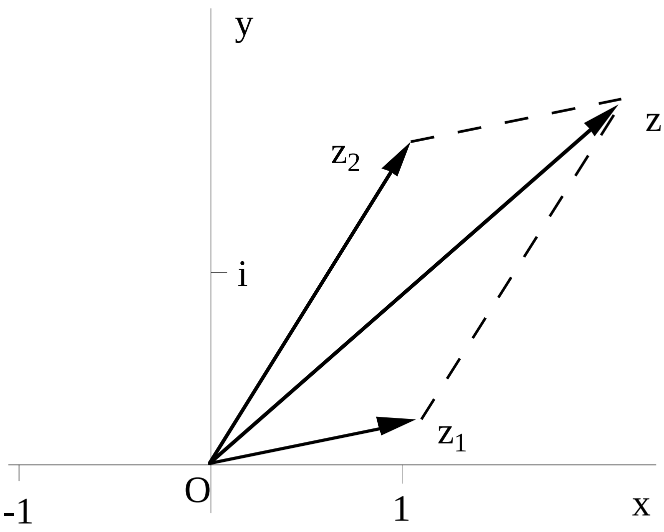
Komplexa talplanet

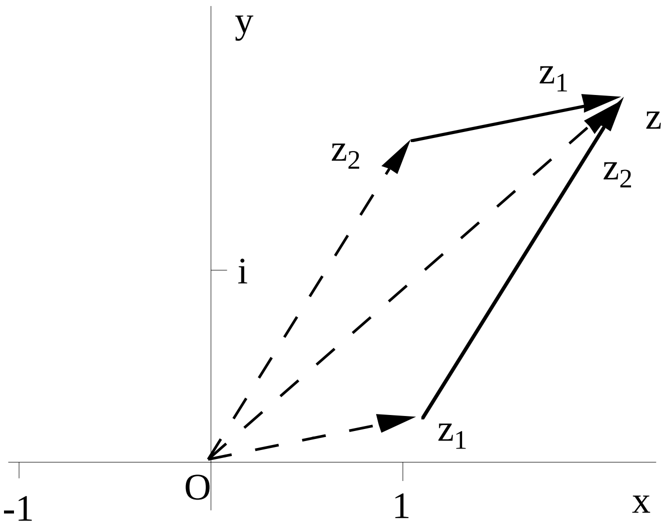
Det är naturligt att representera talparet (a,b) som representerar det komplexa talet z med koordinater för en punkt i ett rätvinkligt kartesiskt *xy*-plan.



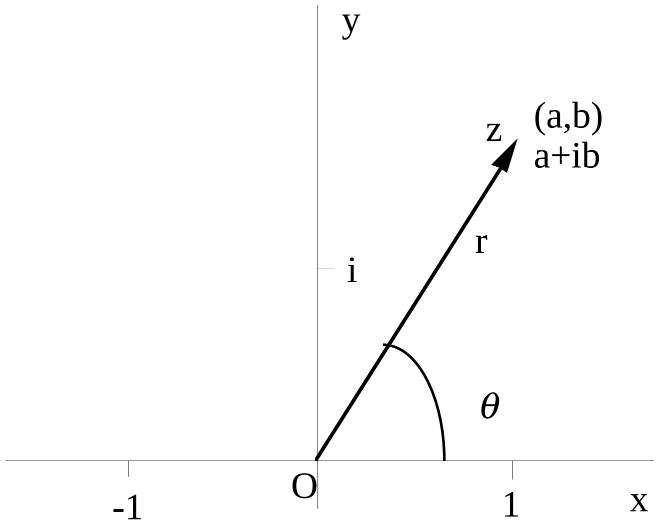
Detta *xy*-plan kallas det komplexa talplanet eller z-planet. Vektoraddition gäller på samma sätt som i vanlig tvådimensionell vektoranalys.



z kan betraktas som vektorn från origo till punkten (a,b) men också som en vektor som har paralellförflyttats en godtycklig strecka i planet.



Polär representation



$$r = |z| \quad ; \quad a = r\cos(\theta) \quad ; \quad b = r\sin(\theta) \tag{16}$$

Längden på vektorn z är absolutbeloppet av z. Vinkeln θ kallas argumentet av z och betecknas arg(z)

$$z = r\left[\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right] \tag{17}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}(b/a) \tag{18}$$

Argumentet har multipelvärden då sinus- och cosinus-funktionerna är periodiska med perioden 2π radianer.

Komplexkonjugatet

Komplexkonjugatet av ett komplext tal $z = (a, b) = a + ib$ är det komplexa talet

$$z^* = (a, -b) = a - ib \tag{19}$$

Geometriskt är komplexkonjugatet en vektor som är spegelbilden i x-axeln av vektorn z. Operationen komplexkonjugering är en ny operation som inte finns i vanlig vektoranalys. I polär representation fås konjugatet genom att byta tecknet på argumentet.

Om vi har ett komplexvärt uttryck som inte har reducerats ned till formen $a + ib$ så får vi komplexkonjugatet genom att byta tecken på alla i.

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* \tag{20}$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^* \tag{21}$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* \tag{22}$$

$$(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^* \tag{23}$$

Vidare har vi att för summan av och skillnaden mellan ett komplext tal och dess konjugat gäller:

$$z + z^* = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z) \tag{24}$$

och

$$z - z^* = i2b = i2\,\mathrm{Im}(z) \tag{25}$$

dvs. summan är reell och differensen rent imaginär.

Vi kan uttrycka absolutbeloppet av z som

$$|z|^2 = zz^* = z^* z \tag{26}$$

och vi har att

$$\left|z^*\right| = |z| \tag{27}$$

Vidare gäller att

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \tag{28}$$

och

$$|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2| \tag{29}$$

Produkter, potenser, kvoter och rötter

Den polära representationen är bekväm att använda när man vill se vad som händer när man multiplicerar ett komplext tal med ett annat. Låt

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \;\; ; \;\; z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \tag{30}$$

Då är

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \tag{31}$$

(Beviset lämnas som ett problem).

Alltså gäller att

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \;\; ; \;\; \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \tag{32}$$

Av detta följer att för positiva heltal n

$$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)] \tag{33}$$

Speciellt gäller för det komplexa talet i, eftersom dess absolutbelopp är *1* och dess argument är $\pi/2$, att varje gång man multiplicerar ett komplext tal z med i så vrids vektorn z vinkeln $\pi/2$ moturs i det komplexa talplanet utan att längden ändras. Allmänt gäller att multiplikation med ett tal på enhetscirkeln i det komplexa talplanet innebär en ren vridning.

Vidare följer att

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)] \tag{34}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)] = \frac{1}{r}[\cos(\theta) - i\sin(\theta)] = \frac{z^*}{r^2} \tag{35}$$

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}[\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)] = \left(\frac{1}{z}\right)^n \tag{36}$$

Alltså gäller (33) även för negativa heltal.

*n*te roten av ett komplext tal har *n* distinkta lösningar:

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right] \quad ; \quad k = 0,1,..,n-1 \tag{37}$$

Slutligen följer att för *m* och *n* positiva heltal utan gemensam faktor gäller

$$\left(z^{1/n}\right)^m = \left(z^m\right)^{1/n} = \sqrt[n]{r^m}\left[\cos\left(\frac{m\theta + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{m\theta + 2\pi k}{n}\right)\right] \quad ; \quad k = 0,1,..,n-1 \tag{38}$$

Problem B:

1. Beräkna : $\dfrac{\left[(2+i)^*\right]^2}{3-4i}$.
2. Beräkna : $\dfrac{\left[(2+i)^2\right]^*}{3-4i}$.
3. Visa (31).
4. Använd den polära formen för att visa att : $i\left(1-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+i\right)=2+i2\sqrt{3}$.
5. Använd den polära formen för att visa att : $\dfrac{i}{2+i}=\dfrac{1}{5}+i\dfrac{2}{5}$.
6. Använd den polära formen för att visa att : $(-1+i)^7=-8(1+i)$.
7. Beräkna: $\left(i^{1/5}\right)^{10}$.
8. Beräkna: $\left(i^{-1/5}\right)^{10}$.
9. Beräkna: $\left[(-i)^{1/5}\right]^{10}$.
10. Beräkna: $\left[(-i)^{-1/5}\right]^{10}$.
11. Finn alla rötter till ekvationen $z^4+4=0$ och använd dessa till att faktorisera z^4+4 i kvadratiska faktorer med reella koefficienter.
12. Visa att: $\left|\left(2z^*+5\right)\left(\sqrt{2}-i\right)\right|=\sqrt{3}|2z+5|$.