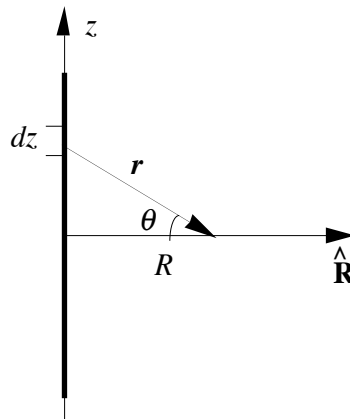


1a)



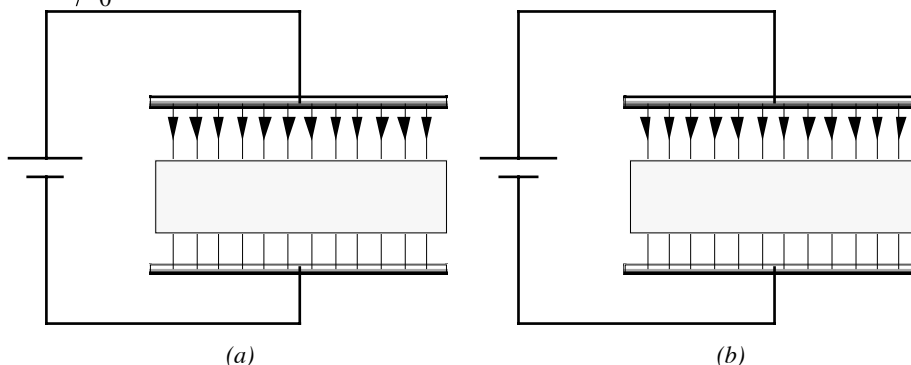
$$\begin{aligned}
 \mathbf{E} &= E \hat{\mathbf{R}} ; \mathbf{E} = \int dQ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \int_{-l}^l dz \frac{Q}{2l} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} ; E = \int_{-l}^l dz \frac{Q}{2l} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \cos\theta \\
 &= \int_{-l}^l dz \frac{Q}{2l} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2 + R^2} \frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}} = \frac{QR}{2l} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l dz \frac{1}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{QR}{2l4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{z}{R^2\sqrt{z^2 + R^2}} \right]_{-l}^l \\
 &= \frac{Q}{2R4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2}} + \frac{1}{\sqrt{l^2 + R^2}} \right] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{l^2 + R^2}} ; \mathbf{E}(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R \sqrt{l^2 + R^2}} \hat{\mathbf{R}}
 \end{aligned}$$

b)  $\mathbf{E}(R) \xrightarrow{l \ll R} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{\mathbf{R}}$ . Fältet från en punktladdning i origo. Fullt rimligt! På stort avstånd är den detaljerade fördelningen av en laddningsfördelning, som är begränsad i rummet, inte av betydelse.

c)  $\mathbf{E}(R) \xrightarrow{R \ll l} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R l} \hat{\mathbf{R}} = \frac{(Q/2l)}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{\mathbf{R}} = \frac{\rho l}{2\pi\epsilon_0 R} \hat{\mathbf{R}}$ . Fältet från en  $\infty$  lång rak linjeladdning. Fullt rimligt! Nära linjeladdningen är randffekter av underordnad betydelse.

2a) I området mellan kondensatorplattorna finns det inga fria laddningar. Gauss sats, Maxwells 1:a ekvation saknar då högerled. Det finns alltså inga källor och inga sänkor till  $\mathbf{D}$ -fältet. M.a.o. kan inte  $\mathbf{D}$ -fältets fältlinjer sluta eller börja någonstans mellan plattorna. Alltså måste fig (a) representera  $\mathbf{D}$ -fältet.  $\mathbf{D}$ -fältet är konstant i hela området. För  $\mathbf{E}$ -fältet gäller att det är  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0$  utanför rätblocket och  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/(\epsilon_r \epsilon_0) = \mathbf{D}/(2\epsilon_0)$  inuti rätblocket. Det stämmer med fig (b) där fältet är hälften så starkt inuti som utanför rätblocket. För  $\mathbf{E}$ -fältet kan också bundna polarisationsladdningar vara källor eller sänkor till fältet. Alltså (a):  $\mathbf{D}$ -fältet och (b):  $\mathbf{E}$ -fältet

b) Här kommer det att finnas fria laddningar på ovan och undersidan av metall-rätblocket, dvs. källor och sänkor till  $\mathbf{D}$ -fältet finns nu. Både  $\mathbf{D}$ - och  $\mathbf{E}$ -fälten är noll inne i rätblocket. Utanför rätblocket är  $\mathbf{E} = \mathbf{D}/\epsilon_0$ .



- 3) Vi inser av symmetriskäl att varje sida av kvadraten ger samma bidrag till  $\mathbf{B}$ -fältet i origo. Tumregeln ger att bidragen pekar i  $z$ -riktningen. Vi använder Biot-Savarts lag:

$$\mathbf{B} = 4 \int_{\text{övre sidan}} \frac{\mu_0 I d\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3} = \left[ \begin{array}{l} \mathbf{r} = -x\hat{x} - a\hat{y} \\ r = \sqrt{x^2 + a^2} \\ d\mathbf{l} = -dx\hat{x} \end{array} \right] = 4 \int_{-a}^a \frac{-\mu_0 I dx \hat{x} \times (-x\hat{x} - a\hat{y})}{4\pi \sqrt{x^2 + a^2}^3} = \frac{\mu_0 I a \hat{z}}{\pi} \int_{-a}^a \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a \hat{z}}{\pi} \left[ \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}} \right]_{-a}^a$$

$$= \frac{\mu_0 I a \hat{z}}{\pi} \left[ \frac{a}{a^2 \sqrt{a^2 + a^2}} - \frac{-a}{a^2 \sqrt{(-a)^2 + a^2}} \right] = \frac{2\mu_0 I a \hat{z}}{\pi} \frac{a}{a^2 \sqrt{a^2 + a^2}} = \frac{2\mu_0 I}{\pi a \sqrt{2}} \hat{z}$$

4)  $I = V_0/R$  ;  $R = \int_{-h}^{2h} \frac{\rho(z)}{A} dz = \frac{1}{A\sigma_0} \int_0^h \sin^2(\pi z/h) dz = \frac{h}{A\sigma_0 2}$  ;  $I = \frac{2V_0\sigma_0 A}{h}$

b)  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$  ;  $\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} = \rho \hat{z} = \rho(I/A)\hat{z}$  ;  $\mathbf{E} = E\hat{z}$  ;  $E(z) = \begin{cases} 0 & ; -h < z < 0 \\ \frac{\sin^2(\pi z/h) 2V_0}{h} & ; 0 \leq z \leq h \\ 0 & ; h < z < 2h \end{cases}$

Vi finner alltså bara ett fält inom mittdelen av motståndet där resistiviteten är skilld från noll. Följaktligen kommer hela potentialskillnaden att ligga över detta område.

- c) Vi behöver här  $\mathbf{D}$ -fältet för att stoppas in i Gauss sats:

$$\mathbf{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \mathbf{E} ; \mathbf{D} = D\hat{z} ; D(z) = \begin{cases} 0 & ; -h < z < 0 \\ \frac{\epsilon_r \epsilon_0 \sin^2(\pi z/h) 2V_0}{h} & ; 0 \leq z \leq h \\ 0 & ; h < z < 2h \end{cases}$$

Som volym i Gauss sats väljer vi en tunn skiva av motståndet på höjden  $z$  med tjocklek  $\Delta z$ , där tjockleken tänkes gå mot noll. Flödet ut ur volymen är flödet ut genom den övre plana ytan minus flödet in genom den undre. Vi betecknar den totala fria laddningen inom denna volym med  $Q(z)$ .

$$\rho(z) = \frac{Q(z)}{A\Delta z} ; Q(z) = \mathbf{D}(z + \Delta z)A\hat{z} + \mathbf{D}(z)A(-\hat{z}) = D(z + \Delta z)A - D(z)A ; \rho(z) = \frac{D(z + \Delta z)A - D(z)A}{A\Delta z}$$

$$= \frac{D(z + \Delta z) - D(z)}{\Delta z} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \frac{dD}{dz} ; \therefore \rho(z) = \begin{cases} 0 & ; -h < z < 0 \\ \frac{4\pi\epsilon_r \epsilon_0 V_0 \sin(\pi z/h) \cos(\pi z/h)}{h^2} & ; 0 \leq z \leq h \\ 0 & ; h < z < 2h \end{cases}$$

- 5) När jonerna, med laddning  $q$ , rör sig med med hastighet  $v$  i jordens magnetfält påverkas de av den magnetsiak Lorentzkraften  $\mathbf{F}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . När vattnet har flutit en stund har laddningarna omfördelats på ett sådant sätt att denna kraft exakt motverkas av en elektrostatisk kraft,  $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E}$ , som orsakas av den resulterande laddningstätheten. I horisontalld tvärs över Themsen påverkas jonerna av den magnetiska kraften  $F = qvB$  där  $B$  är vertikalkomponenten av jordens magnetfält. Denna kraft motverkas fullständigt av den elektriska kraften  $F = qE$  där det elektriska fältet är komponenten som är riktad tvärs över Themsen.

$qE_x = -qvB_z \rightarrow E_x = -vB_z$ , en konstant. Den uppmätta potentialskillnaden mellan kopparplattorna är då detta fält gånger avståndet mellan plattorna.

Alltså  $v = -E_x / B_z = -\Delta V / LB_z$ ;  $L$  är avståndet mellan plattorna.

$$v = -\frac{20 \times 10^{-3} \text{ V}}{300 \text{ m} \cdot (-0.4 \times 10^{-4} \text{ T})} = \frac{5 \text{ V}}{3 \text{ m} \cdot \text{T}} \approx 1.7 \frac{\text{V}}{\text{m} \cdot \text{T}} \approx 1.7 \frac{\text{Nm/C}}{\text{m} \cdot \{N/[C(m/s)]\}} \approx \underline{\underline{1.7 \text{ m/s}}}$$

