

Självstudiehäfte för förkovring i förmågan att utföra integrationer i olika koordinatsystem

Häftet består av tre delar. I den första återfinns uppgifterna. Den andra är facit med svar på uppgifterna. Den tredje innehåller ett av flera möjliga integraluttryck som ger svaret. Följande studiemetod föreslås: Lös uppgifterna, kontrollera om svaret överensstämmer med facit. Om inte försök igen. Om uppgiften verkar omöjlig gå till tredje delen och försök klura ut hur integralen där har erhållits.

Exemplen är på enkla skalära integrander där det gäller att räkna ut speciella volymer, areor och sträckor. När vi har vektorvärda integrander bör vi välja ett fast koordinatsystem eller vara mycket försiktiga. Sådana exempel är inte behandlade i detta häfte.

Linköping 20 mars 2006

Bo E. Sernelius

Sfäriska koordinater

Låt följande problem utgå från en sfär med radie a .

A

1. Beräkna med integration arean av sfären.

B Skär av en kalott med ett horisontellt snitt definierat av vinkeln θ_0 .

2. Beräkna arean av den horisontella bottenytan.
3. Vad blir arean när $\theta_0 = \pi/2$? Är resultatet rimligt?
4. Beräkna arean av kalottens buktiga yta.
5. Vad blir arean när $\theta_0 = \pi/2$? Är resultatet rimligt?
6. Vad blir arean när $\theta_0 = \pi$? Är resultatet rimligt?

Skär nu bort ytterligare en kalott från vår kalott genom att göra ett horisontellt snitt definierat av $\theta_1 < \theta_0$.

7. Beräkna arean av den buktiga ytan hos den stympade kalotten.
8. Beräkna volymen hos den ursprungliga kalotten.
9. Vad blir den när $\theta_0 = \pi/2$? Är resultatet rimligt?
10. Vad blir den när $\theta_0 = \pi$? Är resultatet rimligt?
11. Beräkna volymen hos den stympade kalotten.
12. Beräkna med direkt integration omkretsen till den ursprungliga kalottens bottenyta.
13. Använd uttrycket för omkretsen av en cirkel med given radie för att kontrollera resultatet.

- C Utgå från den ursprungliga sfären och skär ut en "klyfta" definierad av vinklarna ϕ_1 och ϕ_2 , $\phi_1 < \phi_2$.
14. Beräkna med integration arean av en av klyftans plana ytor. Stämmer resultatet med vad du hade förväntat dig?
 15. Beräkna med integration arean av klyftans buktiga yta. Stämmer resultatet med vad du hade förväntat dig?
 16. Beräkna med integration volymen av klyftan. Stämmer resultatet med vad du hade förväntat dig?

Gör ett horisontellt snitt genom klyftan så att en del av en kalott avskiljs från klyftan. Låt snittet definieras av vinkeln θ_0 .

17. Beräkna med direkt integration arean av den plana bottenytan av den avskiljda biten
18. Beräkna arean av en av de andra två plana ytorna.
19. Beräkna arean av den buktiga ytan.
20. Beräkna volymen av den avskiljda biten.

Cylindriska koordinater

Låt följande problem utgå från en cylinder med radie a och längd L .

A

21. Beräkna volymen av sfären
22. Beräkna arean av en av kantytorna.
23. Beräkna arean av den buktiga ytan.
24. Beräkna omkretsen av bottenytan.

B Skär ut en klyfta med snitt längs axeln definierad av vinklarna ϕ_1 och ϕ_2 , $\phi_1 < \phi_2$.

25. Beräkna arean av en av de vertikala plana ytorna.
26. Beräkna arean av en av de horisontella plana ytorna.
27. Beräkna arean av den krökta ytan.
28. Beräkna volymen av klyftan.

Facit

$$I1 := 4 \cdot a^2 \cdot \pi$$

$$I2 := a^2 \cdot \sin(\theta_0)^2 \cdot \pi$$

$$I3 := a^2 \cdot \pi$$

$$I4(\theta_0) := -2 \cdot a^2 \cdot (\cos(\theta_0) - 1) \cdot \pi$$

$$I5 := 2 \cdot a^2 \cdot \pi$$

$$I6 := 4 \cdot a^2 \cdot \pi$$

$$I7 := 2 \cdot a^2 \cdot (-\cos(\theta_0) + \cos(\theta_1)) \cdot \pi$$

$$I8(\theta_0) := \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot (-3 \cdot \cos(\theta_0) + 2 + \cos(\theta_0)^3) \cdot \pi$$

$$I9 := \frac{2}{3} \cdot a^3 \cdot \pi$$

$$I10 := \frac{4}{3} \cdot a^3 \cdot \pi$$

$$I11(\theta_0, \theta_1) := \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot (3 \cdot \cos(\theta_1) - \cos(\theta_1)^3 + \cos(\theta_0)^3 - 3 \cdot \cos(\theta_0)) \cdot \pi$$

$$I12 := 2 \cdot a \cdot \sin(\theta_0) \cdot \pi$$

$$I13 := 2 \cdot \pi \cdot (a \cdot \sin(\theta_0))$$

$$I14(\phi_1) := \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \pi$$

$$I15(\phi_1, \phi_2) := -2 \cdot a^2 \cdot (-\phi_2 + \phi_1)$$

$$I16(\phi_1, \phi_2) := \frac{-2}{3} \cdot a^3 \cdot (-\phi_2 + \phi_1)$$

$$I17(\phi_1, \phi_2, \theta_0) := \frac{-1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(\theta_0)^2 \cdot (-\phi_2 + \phi_1)$$

$$I19(\phi_1, \phi_2, \theta_0) := a^2 \cdot (\cos(\theta_0) - 1) \cdot (-\phi_2 + \phi_1)$$

$$I20(\phi_1, \phi_2, \theta_0) := \frac{-1}{6} \cdot a^3 \cdot (\cos(\theta_0) + 2) \cdot (\cos(\theta_0) - 1)^2 \cdot (-\phi_2 + \phi_1)$$

$$I21 := a^2 \cdot \pi \cdot L$$

$$I22 := a^2 \cdot \pi$$

$$I23 := 2 \cdot a \cdot \pi \cdot L$$

$$I24 := 2 \cdot a \cdot \pi$$

$$I25 := a \cdot L$$

$$I26 := \frac{-1}{2} \cdot a^2 \cdot (-\phi_2 + \phi_1)$$

$$I27 := -a \cdot (-\phi_2 + \phi_1) \cdot L$$

$$I28 := \frac{-1}{2} \cdot a^2 \cdot (-\phi_2 + \phi_1) \cdot L$$

Möjliga integraluttryck

$$I1 := \int_0^{2 \cdot \pi} \left[\int_0^{\pi} a^2 \cdot \sin(\theta) \, d\theta \right] d\phi$$

$$I2 := \int_0^{2 \cdot \pi} \left[\int_0^{a \cdot \sin(\theta)} R \, dR \right] d\phi$$

$$I3 := a^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \pi$$

$$I4(\theta) := \int_0^{2 \cdot \pi} \left[\int_0^{\theta} a^2 \cdot \sin(\theta) \, d\theta \right] d\phi$$

$$I5 := -2 \cdot a^2 \cdot \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1 \right) \cdot \pi$$

$$I6 := -2 \cdot a^2 \cdot \left(\cos(\pi) - 1 \right) \cdot \pi$$

$$I7 := \int_0^{2 \cdot \pi} \left[\int_{\theta_1}^{\theta} a^2 \cdot \sin(\theta) \, d\theta \right] d\phi$$

$$I8(\theta) := \int_0^{2 \cdot \pi} \left[\int_0^{\theta} \int_{a \cdot \frac{\cos(\theta)}{\cos(\theta)}}^a r^2 \, dr \cdot \sin(\theta) \, d\theta \right] d\phi$$

$$I9 := \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot \left(-3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \right) \cdot \pi$$

$$I10 := \frac{1}{3} \cdot a^3 \cdot (-3 \cdot \cos(\pi) + 2 + \cos(\pi)^3) \cdot \pi$$

$$I11(\theta_0, \theta_1) := \int_0^{2 \cdot \pi} \left[\int_0^{\theta_1} \left[\int_{a \cdot \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}}^{a \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{\cos(\theta)}} r^2 \, dr \cdot \sin(\theta) \, d\theta + \int_{\theta_1}^{\theta_0} \left[\int_{a \cdot \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}}^a r^2 \, dr \cdot \sin(\theta) \, d\theta \right] d\phi \right] d\phi$$

$$I12 := \int_0^{2 \cdot \pi} a \cdot \sin(\theta_0) \, d\phi$$

$$I13 := 2 \cdot \pi \cdot (a \cdot \sin(\theta_0))$$

$$I14(\phi_1) := \int_0^{\pi} \int_0^a r \, dr \, d\theta$$

$$I15(\phi_1, \phi_2) := \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\pi} a^2 \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi$$

$$I16(\phi_1, \phi_2) := \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\pi} \int_0^a r^2 \cdot \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$I17(\phi_1, \phi_2, \theta_0) := \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\theta_0} a \cdot \sin(\theta) \, R \, dR \, d\phi$$

$$I18(\theta_0) := \int_0^{\theta_0} \int_{a \cdot \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}}^a r \, dr \, d\theta$$

$$I19(\phi_1, \phi_2, \theta_0) := \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\theta_0} a^2 \cdot \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi$$

$$I20(\phi_1, \phi_2, \theta_0) := \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\theta_0} \int_{a \cdot \frac{\cos(\theta_0)}{\cos(\theta)}}^a r^2 \cdot \sin(\theta) \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$I_{21} := \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\cdot\pi} \int_0^a R \, dR \, d\phi \, dz$$

$$I_{22} := \int_0^{2\cdot\pi} \int_0^a R \, dR \, d\phi$$

$$I_{23} := \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^{2\cdot\pi} a \, d\phi \, dz$$

$$I_{24} := \int_0^{2\cdot\pi} a \, d\phi$$

$$I_{25} := \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_0^a 1 \, dR \, dz$$

$$I_{26} := \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^a R \, dR \, d\phi$$

$$I_{27} := \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\phi_1}^{\phi_2} a \, d\phi \, dz$$

$$I_{28} := \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^a R \, dR \, d\phi \, dz$$