Magnetostatik

Vi lämnar nu elektrostatiken och låter stationära strömmar flyta. Det innebär att fälten fortfarande är statiska och vi kan beräkna de elektriska och magnetiska fälten separat. De kopplar inte till varandra.

Magnetfälten beskrivs av följande Maxwells ekvationer

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0; \qquad \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Källan till fälten är strömtätheten **J** i den andra ekvationen. Vi behöver definiera ett antal storheter:

Ström
Strömtäthet
Mobilitet
Ledningsförmåga eller konduktivitet
Resistivitet
Resistans

Ström

Ström eller strömstyrka, I, är definierad som den laddning som per tidsenhet passerar genom ett tvärsnitt av ett föremål.
Dimension: laddning per tid.
Enhet: A(mpere), en av grundenheterna i SI-systemet.

Strömtäthet (volymströmtäthet)

Definition:

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} \qquad \boxed{ekv\ 5:1}$$

där

n är koncentrationen av laddningsbärare
q är varje laddningsbärares laddning
v är laddningarnas genomsnittliga hastighet, drifthastigheten.

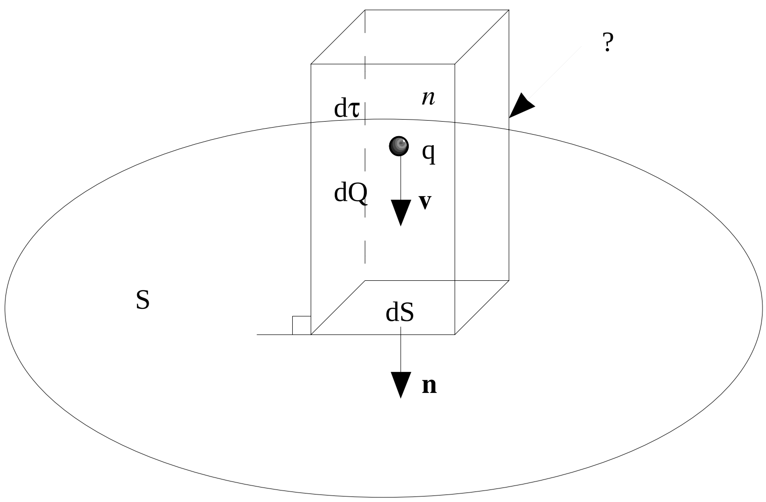
J är ett vektorfält.

Dimension: laddning per yta och tid
Enhet: $As/m^2s = A/m^2$ (Obs!! inte A/m^3)

Anm: Medelfarten? Har den något med $v = |\mathbf{v}|$ att göra?
Svar: Nej!!!
Medelfarten är typiskt 10^6 m/s
v är typiskt 10^{-4} m/s

Strömmen genom ytan *S* kan tecknas som

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \qquad \boxed{ekv\ 5:2}$$

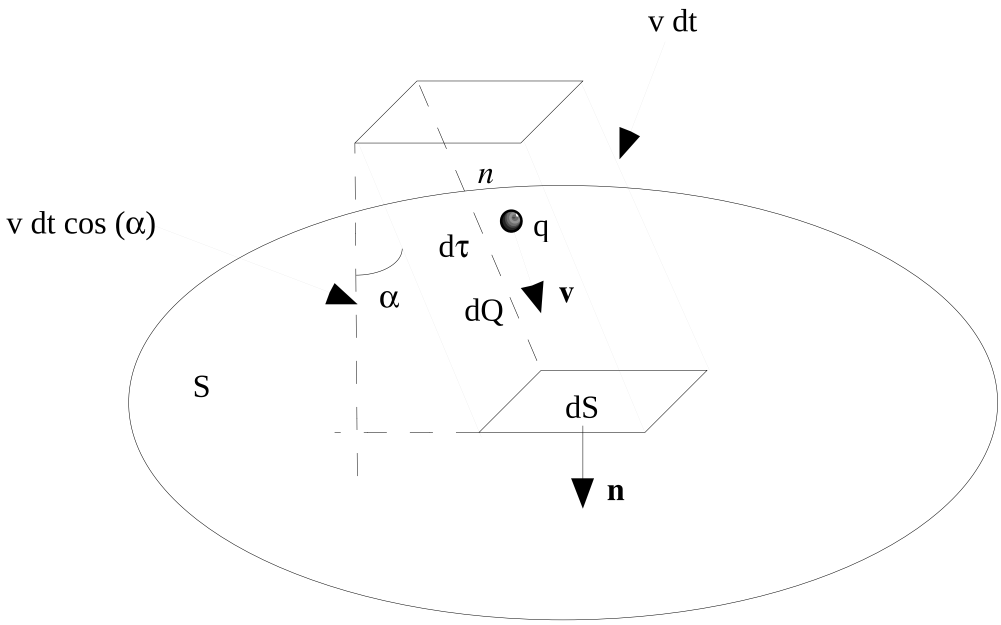


Hur långt kommer en laddning som rör sig med hastigheten v på tiden dt?

Om vi väljer kantlängden att vara den streckan så passerar
alla laddningar inom dτ, dS på tiden dt.

Alltså är strömmen dI genom dS: dI = dQ/dt.

$$dI = nq\left(vdtdS\right)/dt = nqvdS = JdS$$



$$dI = nq\left(vdt\cos(\alpha)dS\right)/dt = nqv\cos(\alpha)dS = J\cos(\alpha)dS = \mathbf{J}\cdot d\mathbf{S}$$

Mobilitet

Ofta finns det ett linjärt samband mellan drifthastighetens storlek och det elektriska fältet (materialet är ohmskt).

Definition

$$v = |\mathbf{v}| = \mu|\mathbf{E}| = \mu E \qquad \boxed{ekv\ 5:3}$$

mobiliteten är en materialkonstant som beskriver hur lätt en laddningsbärare kan ta sig fram genom materialet.

Enhet: $m^2/Vs = As^2/kg$

Anm: $\mathbf{J} = nqv\hat{v} = nq\mu E\hat{v} = \left|\begin{matrix} q>0 \rightarrow \hat{E} = \hat{v} \\ q<0 \rightarrow \hat{E} = -\hat{v} \end{matrix}\right| = n|q|\mu\mathbf{E}$

Konduktivitet eller ledningsförmåga

För ohmska material är det (om inte fältet är för starkt) ett linjärt samband mellan strömtätheten och **E**-fältet.

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \qquad \boxed{ekv\ 5:4}$$

Materialkonstanten σ kallas konduktiviteten.

$$\sigma = n|q|\mu$$

SI-enhet $(\Omega m)^{-1}$

För ett metalliskt material gäller

$$\sigma = nq^2\tau/m \rightarrow \mu = |q|\tau/m,$$

där τ och m är transporttiden respektive laddningsbärarens massa.

Vi visar detta lätt. Utan pålagt **E**-fält är medelhastigheten hos laddningsbärarna noll, $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$.

Vid pålagt **E**-fält gäller att fermisfären driver i **k**-rummet tills att efter transporttiden τ det inträffar ett stationärt tillstånd då spridning mot defekter i materialet balanserar driften orsakad av fältet.

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{E}$$

$$\langle \mathbf{p} \rangle = q\mathbf{E}\tau \rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{v}_{drift} = \langle \mathbf{v} \rangle = q\mathbf{E}\tau/m$$

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} = nq^2\tau\mathbf{E}/m = \sigma\mathbf{E} \rightarrow \sigma = nq^2\tau/m$$

Anm: vi ser att mobiliteten är proportionell mot transporttiden och inverst proportionell mot laddningsbärarens massa. Ju längre tid fermisfären driver innan stationärt tillstånd inträffar ju högre är mobiliteten; ju mindre massa laddningsbäraren har ju högre är mobiliteten.

Resistiviteten

Ofta beskrivs ett materials förmåga att leda ström med resistiviteten i stället för med konduktiviteten. Dessa material-parametrar är enkelt relaterade till varandra:

$\rho = 1/\sigma$.
SI-enhet: Ωm

Hos goda ledare, t.ex. silver och koppar är resistiviteten i storleksordning 10^{-8} Ωm. Goda isolatorer har värden i storlekordning 10^{16} Ωm.

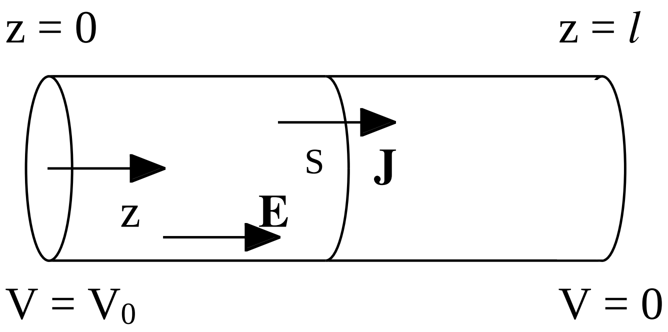
Temperaturberoendet:

Två effekter som verkar åt motsatt håll:

1) Fononspridning minskar ledningsförmågan. När temperaturen höjs skapas fononer i materialet. Dessa kan aborberas vid en laddningsbärarspridning. Dessutom blir fermikanten diffus, dvs laddningsbärare finns med högre energi än det lägst obesatta tillståndet. Dessa laddnings-bärare kan falla ned och samtidigt emittera en fonon. Fononspridning minskar ledningsförmågan för både metaller och isolatorer.

2) När temperaturen ökar så skapas det fler och fler ladd-ningsbärare i isolatorer och halvledare. Detta ökar led-ningsförmågan. Denna effekt är mer kraftfull än minsk-ningen pga. Fononerna.

Resistans



Definition: $R = V_0 / I$

Vi ska nu bestämma resistansen för trådsegmentet i figuren. Vi antar att materialet är ohmskt och homogent. Vi lägger potentialen V_0 över tråden. En konstant ström I, jämt fördelad över ledarens tvärsnitt, flyter från vänster till höger. Tvärsnittsarean är S, längden är l och konduktiviteten är σ.

Lösningsschema:

$$I \to \mathbf{J} \to \mathbf{E} \to V_0$$

Vi får

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (J\hat{z}) \cdot (dS\hat{z}) = \int_S J dS = J \int_S dS = JS \to \mathbf{J} = (I/S)\hat{z}$$

Ohms lag i punktform ger

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \to \mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = (I/\sigma S)\hat{z}$$

Enligt definitionen av potential har vi

$$V_0 = -\int_{ref}^{akt} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\int_{z=l}^{0} (I/\sigma S)\hat{z}\cdot(dz\hat{z}) = \int_{z=0}^{l} (I/\sigma S)dz$$

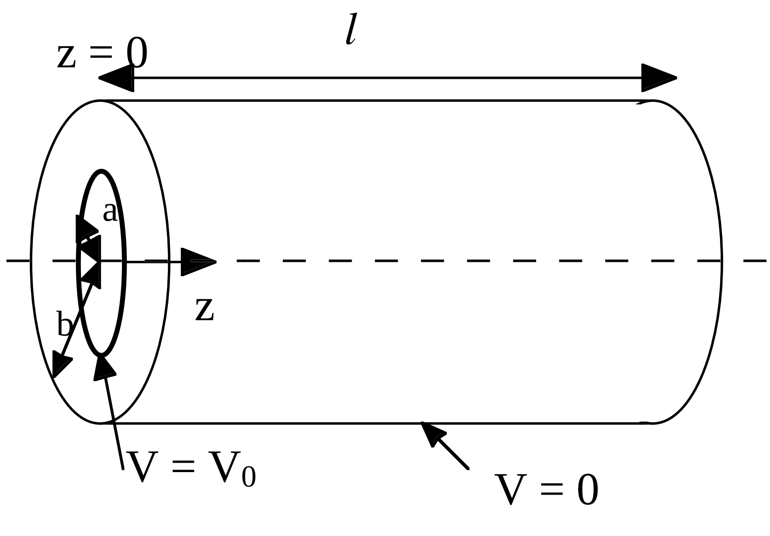
$$= (I/\sigma S)\int_{z=0}^{l} dz = Il/\sigma S$$

och slutligen

$$R = V_0/I = Il/\sigma SI = l/\sigma S = \rho l/S$$

där ρ är resistiviteten.

Läckresistansen för en koaxialkabel



En koaxialkabel består av två metallhöljen med ett isolerande material i mellanrummet. Ingen isolator är perfekt isolerande. I vårt exempel har materialet konduktiviteten σ. Vi lägger potentialen V_0 på det inre höljet och jordar det yttre. Det kommer att flyta en läckström, I, från det inre höljet till det yttre i ett segment av längd l, enligt figuren. Segmentet har en läckresistans R_{es} som vi nu ska beräkna. Vi använder samma lösningsschema som i det tidigare exemplet. Vi använder cylindriska koordinater. Vi har axiell symmetri vilket medför att storheterna inte beror av vinkeln ϕ. Vi antar att segmentet är en del av en lång rak koaxialkabel. Vi har då cylindersymmetri vilket innebär att storheterna inte beror av z. Alltså beror storheterna endast av R.

Lösningsschema:

$$I \to \mathbf{J} \to \mathbf{E} \to V_0$$

Vi får

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_S J(R)\hat{R} \cdot \left(dS\hat{R}\right) = \int_S J(R)dS = J(R)S(R)$$
$$= J(R)l2\pi R \to \mathbf{J} = \left(I/2\pi Rl\right)\hat{R}$$

Ohms lag i punktform ger

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \to \mathbf{E} = \mathbf{J}/\sigma = \left(I/2\pi Rl\right)\hat{R}$$

Enligt definitionen av potential har vi

$$V_0 = -\int_{ref}^{akt} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_{R=b}^{a} \left(I/\sigma 2\pi Rl\right)\hat{R} \cdot \left(dR\hat{R}\right) = \int_{R=a}^{b} \left(I/\sigma 2\pi Rl\right)dR$$
$$= \left(I/\sigma 2\pi l\right)\int_{R=a}^{b} R^{-1}dR = \left(I/\sigma 2\pi l\right)\left[\ln R\right]_a^b = I\ln\left(b/a\right)/\sigma 2\pi l$$

och slutligen

$$R_{es} = V_0/I = \frac{\ln(b/a)}{2\pi l\sigma}$$