Energin i ett elektromagnetiskt fält

Ett elektromagnetsikt fält innehåller energi. Både det elektriska och det magnetiska fältet bidrar. Vi ska nu härleda uttrycket för energitätheten i fälten genom att studera de två idealiseringarna ideal kondensator och lång rak spole. Vi börjar med den ideala kondensatorn.

Energin i en laddad kondensator

Hur mycket energi måste vi tillföra när vi laddar upp en kondensator?

Vi för laddning från den nedre plattan till den övre.

Vi måste beakta att i varje ögonblick beror potentialskillnaden mellan plattorna på hur mycket laddning vi redan har förflyttat. Vi har

$$dW = dQ \cdot V(Q),$$

där dW är arbetet vi måste utföra då vi flyttar dQ från den undre plattan till den övre.

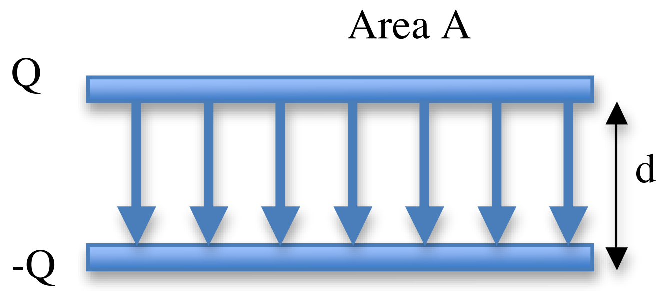
$$W = \int dW = \int_0^Q dQ V(Q) = \left| V = \frac{Q}{C} \right| = \int_0^Q dQ \frac{Q}{C} = \frac{Q^2}{2C}$$

Alltså är energin som finns lagrad i kondensatorn

$$W = \frac{Q^2}{2C} \text{ eller } W = \frac{1}{2}CV^2 \text{ eller } W = \frac{1}{2}QV .$$

Var finns denna energi?
Den finns lagrad i det elektriska fältet.
Om vi har ett elektriskt fält närvarande så har vi energi. Detta gäller även för magnetfält.

<u>Uppskattning av energitätheten, W/τ i ett elektriskt fält inuti ett dielektrikum.</u>



$$E = V/d$$

$$C = \frac{A\varepsilon_0\varepsilon_r}{d}$$

$$\tau = A \cdot d$$

$$\frac{W}{\tau} = \frac{CV^2}{2\tau} = \frac{A\varepsilon_0\varepsilon_r \cdot d^2E^2}{d \cdot 2 \cdot Ad} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}ED$$

Detta gäller generellt, inte bara för en plattkondensator.

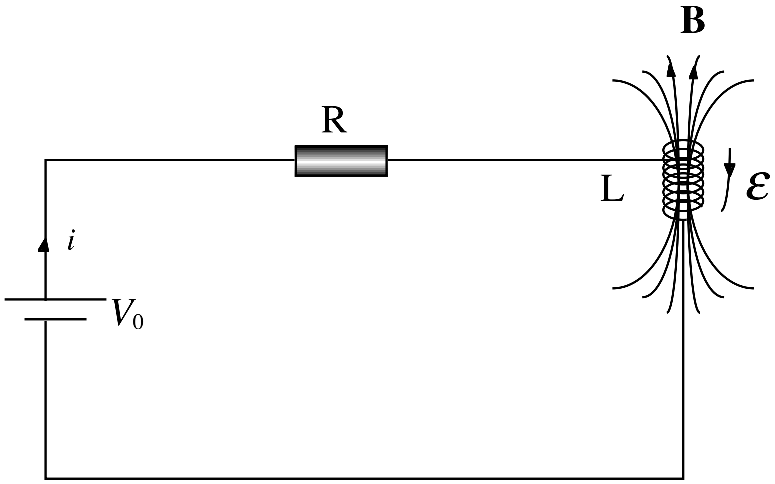
Energitätheten i det elektriska fältet är

$$\boxed{\frac{W}{\tau} = \frac{1}{2}ED}$$

När vi förflyttade laddningarna skapade vi fältet.

Energin i en spole

RL-krets



Spänningskällan ansluts vid tiden t = 0. Då går ingen ström genom kretsen. Den ökar gradvis och när stationärt tillstånd uppnås flyter strömmen I_0 genom kretsen.

Vi har

$$\begin{cases} \varepsilon = -L\dfrac{\partial i}{\partial t} \\ V_0 + \varepsilon = Ri \end{cases} \Rightarrow V_0 = L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri$$

Spänningskällan har levererat energin

$$W = \int V_0 i dt = \int \left(Li\frac{\partial i}{\partial t} + Ri^2 \right) dt$$

Den 1:a termen går till energi, W_m, som lagras i spolen. Den 2:a termen går till förluster i motståndet.

$$W_m = \int_0^\infty Li\frac{\partial i}{\partial t}dt = L\int_0^\infty i\frac{\partial i}{\partial t}dt = \frac{1}{2}L\int_0^\infty \frac{\partial i^2}{\partial t}dt = \frac{1}{2}L\left[i^2\right]_0^{I_0} = \frac{1}{2}LI_0^2$$

$$= \left|\Phi = Li\right| = \frac{1}{2}\Phi^2 / L = \frac{1}{2}\Phi I_0$$

Tecknet på emsen? Vi har ansatt att den verkar i positiv riktning (strömriktningen). Den får då ett negativt värde. Den försöker motverka strömökningen genom spolen.

Uppskattning av energitätheten, W/τ i ett magnetfält.

Vi använder oss av vårt funna resultat och applicerar det på en lång rak spole.

$$L = \mu_0 N^2 S / l$$
$$\Phi = B \cdot S \cdot N$$
$$W_m = \frac{1}{2}\Phi^2 / L = \frac{1}{2}\frac{B^2 S^2 N^2 l}{\mu_0 N^2 S} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S l = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tau$$

$$\frac{W_m}{\tau} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2} BH$$

Den elektromagnetiska energitätheten är

$$\boxed{\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} ED + \frac{1}{2} BH}$$

Intensiteten för en plan våg i vakuum.

Vi har funnit att en plan våg enligt nedan är en lösning till Maxwells ekvationer i vakuum.

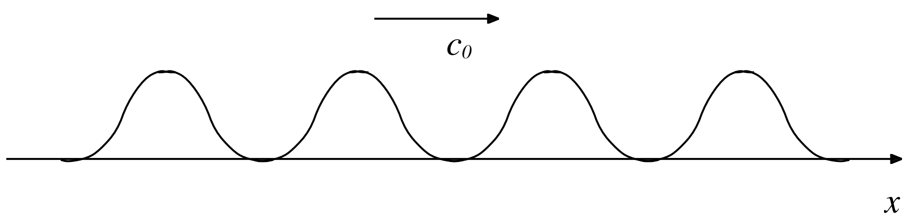
$$\begin{cases} \mathbf{E} = E_0 \sin(kx - \omega t)\hat{y} \\ \mathbf{B} = B_0 \sin(kx - \omega t)\hat{z} \end{cases};\ B_0 = E_0/c_0;\ \omega/k = c_0 = 1\Big/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$$

Energitätheten

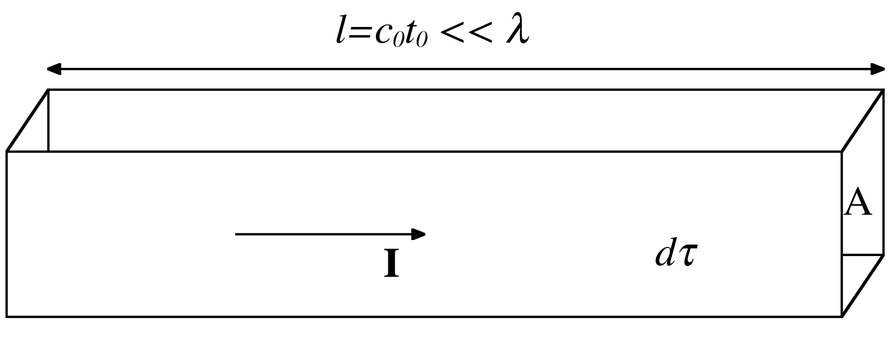
$$\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E_0^2 + B_0^2/\mu_0\right)\sin^2(kx - \omega t)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \underbrace{1\big/c_0^2 \varepsilon_0 \mu_0}_{1}\right)\sin^2(kx - \omega t) = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx - \omega t)$$

Obs! Det elektriska och magnetiska fältet ger samma bidrag till energitätheten.



På tiden t_0 passerar energin som finns inuti volymen $d\tau$ nedan genom ytan med area A.



Intensiteten definieras som energin per tidsenhet och areaenhet.

$$I = \frac{\frac{\partial W}{\partial \tau} \cdot d\tau}{t_0 \cdot A} = \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(kx - \omega t\right) \cdot l \cdot A}{t_0 \cdot A}$$

$$= \frac{\varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(kx - \omega t\right) \cdot c_0 \cdot t_0 \cdot A}{t_0 \cdot A} = c_0 \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(kx - \omega t\right)$$

Intensiteten definieras som en vektor som pekar i energins fortskridningsriktning.

$$\mathbf{I} = I\hat{x} = c_0 \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2\left(kx - \omega t\right)\hat{x}$$

Tidsmedelvärdet blir

$$\langle \mathbf{I} \rangle = \frac{1}{2} c_0 \varepsilon_0 E_0^2 \hat{x}$$

Intensiteten för en plan våg i ett dielektrikum.

Härledningen går till på exact samma sätt som i vakuum men nu med ε_0 utbytt mot $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$.

$$\varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$$

$$\Downarrow$$

$$c_0 \to c_m = 1\Big/\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0} = c_0 \Big/ \sqrt{\varepsilon_r} = c_0/n$$

n är brytningsindexet $n = \sqrt{\varepsilon_r(\omega)}$

$$\Downarrow$$

$$B_0 = E_0/c_m$$

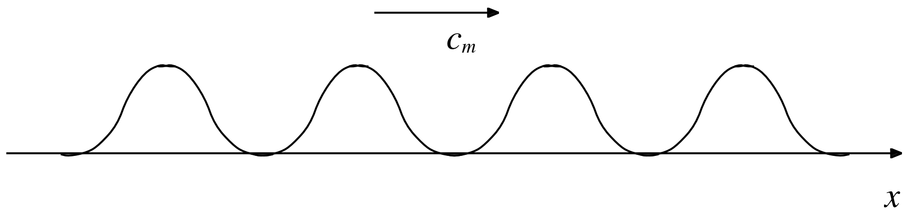
$$\omega/k = c_m = c_0/n$$

Energitätheten

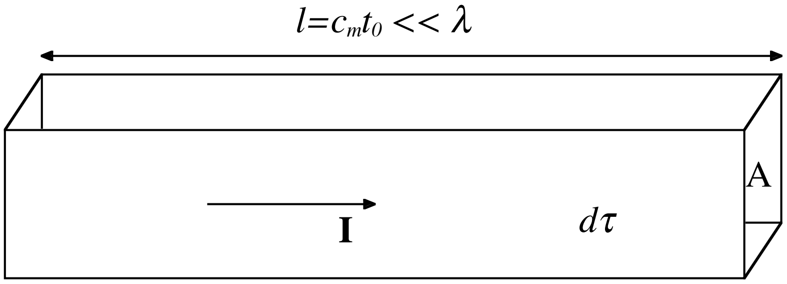
$$\frac{\partial W_{em}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 + B_0^2/\mu_0\right)\sin^2(kx-\omega t)$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \left(1 + \underbrace{1/c_m^2 \varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}_{1}\right)\sin^2(kx-\omega t) = \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

Obs! Det elektriska och magnetiska fältet ger samma bidrag till energitätheten.



På tiden t_0 passerar energin som finns inuti volymen $d\tau$ nedan genom ytan med area A.



$$I = \frac{\frac{\partial W}{\partial \tau}\cdot d\tau}{t_0 \cdot A} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx-\omega t)\cdot l \cdot A}{t_0 \cdot A} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx-\omega t)\cdot c_m \cdot t_0 \cdot A}{t_0 \cdot A}$$

$$= c_m \varepsilon_r \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx-\omega t) = n c_0 \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2(kx-\omega t)$$

$$\left(k = nk_0 = n\omega/c_0 = \omega/c_m\right)$$

$$\lambda = \lambda_0/n$$

Våglängden är kortare inne i materialet än i vakuum om $n > 1$.